
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Aritmética
Intelectum
EVOLUCIÓN





IA

Indicadores de logro

Unidad 1

- Identifica los conjuntos unitarios, iguales y vacíos, y los relaciona con sus propiedades.
- Representa mediante el diagrama de Venn-Euler las operaciones sobre unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento de conjuntos.
- Identifica las propiedades sobre adición, sustracción, multiplicación y división en el conjunto de los números naturales.
- Aplica las propiedades de las operaciones sobre unión, intersección, diferencia, diferencia simétrica y complemento de los conjuntos.
- Expresa numerales en diferentes sistemas de numeración.
- Representa numerales en los diferentes sistemas de numeración utilizando algoritmos.
- Identifica la distintas propiedades de los números enteros en la recta numérica.
- Resuelve operaciones sobre adición, sustracción, multiplicación y división en el conjunto de los números enteros.

Unidad 2

- Identifica los criterios de la divisibilidad relacionados con los principios de multiplicidad.
- Infiere de manera correcta los criterios de la divisibilidad mediante el algoritmo de la descomposición polinómica.
- Analiza la descomposición canónica de un número y la relaciona con sus propiedades.
- Aplica las propiedades de los números primos mediante el algoritmo de la descomposición canónica en el estudio de sus divisores.
- Interpreta el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo de los números naturales.
- Demuestra las propiedades del máximo común divisor y el mínimo común múltiplo mediante la descomposición canónica.
- Analiza las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de las distintas clases de números racionales.
- Aplica operaciones de adición, multiplicación, división y multiplicación en las diferentes clases de fracciones.

LOS ICEBERGS

Los icebergs son grandes pedazos de hielo flotante desprendidos de los glaciares de las regiones polares de la Tierra, los cuales forman parte de la criósfera (partes de la superficie de la Tierra donde el agua se encuentra en estado sólido). Estos son arrastrados por las corrientes marinas de origen ártico, hacia lugares de baja latitud.

La mayor parte del volumen de los icebergs se encuentra por debajo de la superficie del agua (esto se debe a que son menos densos que el agua en estado líquido) y solo una pequeña porción permanece por encima de dicha superficie.

En la imagen se muestra un iceberg con sus respectivas medidas. Responde:

¿Cuál es la distancia entre el punto más alto del iceberg (por encima de la superficie) y el punto que se encuentra a mayor profundidad (dentro del agua)?

¿Cuánto mide la parte sumergida?



Contenido:

Unidad 1

- Teoría de conjuntos.
- Conjunto de los números naturales (ℕ).
- Numeración.
- Conjunto de los números enteros (ℤ).

Unidad 2

- Divisibilidad.
- Números primos.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.
- Conjunto de los números racionales (ℚ).

Unidad 3

- Razones y proporciones.
- Magnitudes. proporcionales.
- Regla de tres.
- Tanto por ciento.

Unidad 4

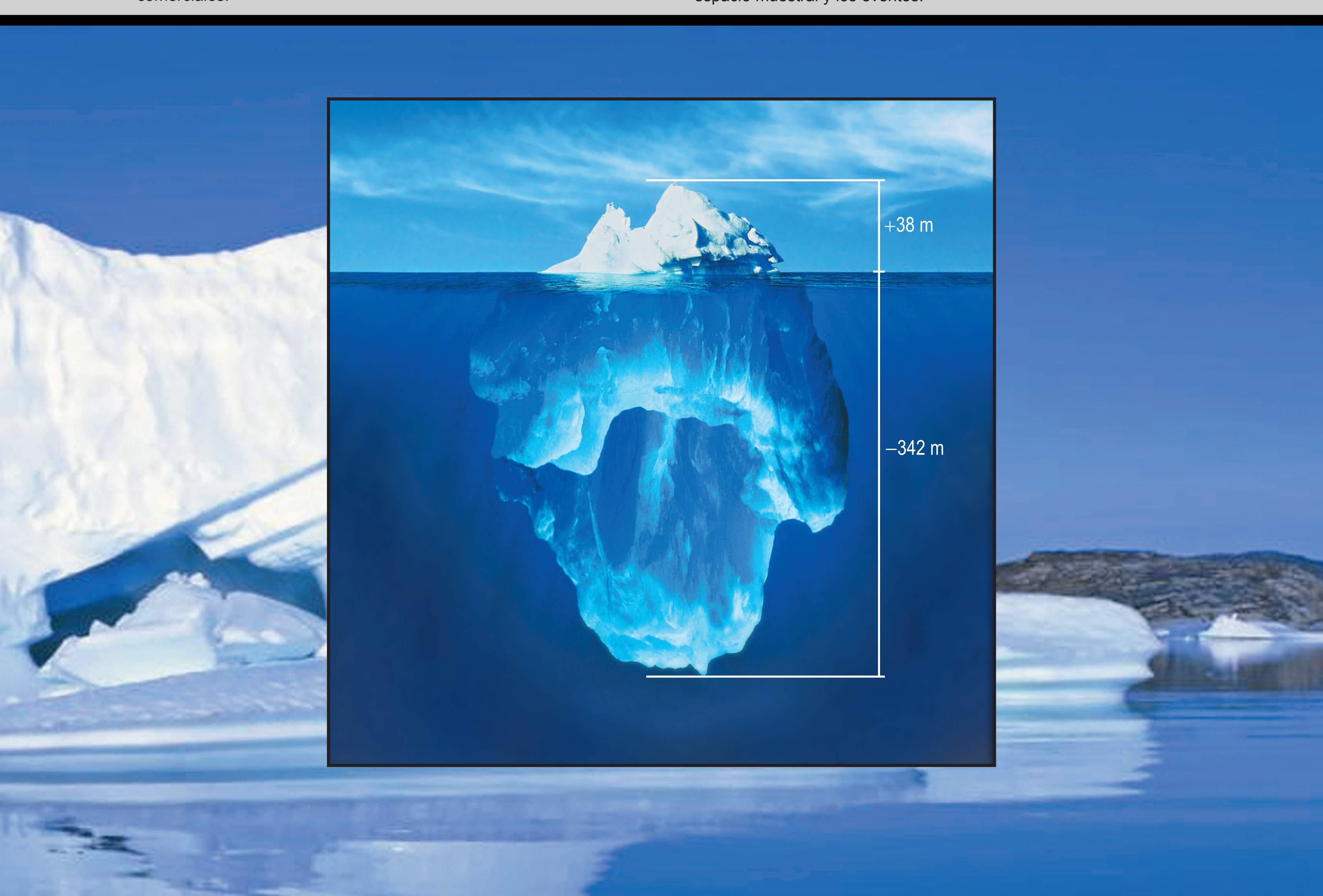
- Promedios.
- Estadística.
- Análisis combinatorio.
- Probabilidades.

Unidad 3

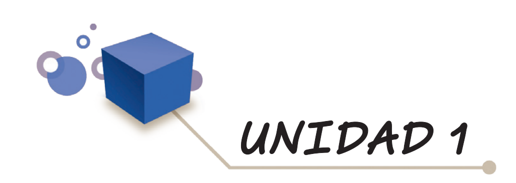
- Identifica las propiedades sobre razones y proporciones, y serie de razones geométricas equivalentes.
- Infiere de manera correcta las propiedades sobre razones, proporciones y serie de razones geométricas equivalentes.
- Relaciona correctamente las propiedades sobre las magnitudes directas e inversas en problemas con engranajes y reparto proporcional.
- Identifica las propiedades sobre las magnitudes directas e inversas en la representación grafica.
- Relaciona los algoritmos sobre la regla de tres directa e inversa, con el planteamiento de los problemas.
- Analiza el algoritmo de la regla de tres directa e inversa en función de las magnitudes proporcionales.
- Evalúa los conceptos del tanto por ciento en función de los aumentos y descuentos sucesivos relacionados con las aplicaciones comerciales.
- Elabora algoritmos en la representación de los aumentos y descuentos sucesivos, en la interpretación de los problemas sobre aplicaciones comerciales.

Unidad 4

- Identifica las propiedades de los promedios relacionados con la media aritmética, geométrica y armónica.
- Infiere de manera correcta las propiedades relacionadas con la media aritmética, geométrica y armónica.
- Emplea cuadros estadísticos, diagrama de barras para distribuir las frecuencias y los relaciona con los valores de tendencia central: media, mediana y moda.
- Identifica los datos de la distribución de frecuencia y los representa mediante diagramas de barras para el cálculo de la media, mediana y moda.
- Emplea los principios fundamentales de conteo: adición y multiplicación.
- Infiere de manera correcta los principios de adición y multiplicación relacionados con las técnicas de conteo.
- Interpreta los algoritmos para calcular el espacio muestral existente en el cálculo de la probabilidad.
- Evalúa correctamente los experimentos aleatorios relacionados con el espacio muestral y los eventos.




UNA PESADILLA PROPORCIONAL...
GIULIANA TRABAJA CON UNAS SUSTANCIAS EN SU LABORATORIO...
FINALMENTE HE HALLADO LA "FÓRMULA DE CRECIMIENTO ACELERADO", AHORA SOLO NECESITO UN SUJETO DE PRUEBA PARA CONOCER SUS EFECTOS...
¿QUIÉN SERÍA TAN TONTO COMO PARA PROBAR UNA FÓRMULA POTENCIALMENTE PELIGROSA?
GIULIANA LE INYECTA LA SUSTANCIA AL ERIZO.
¡NO PATALEES, QUIETO!
¡TRANQUILO, NO VA A DOLERTE!
¡¡¡SUÉLTENME!!!
¡MIRA, HA CRECIDO NOTORIAMENTE!
EXACTO, ESTÁ CRECIENDO A RAZÓN DE 1,618 METROS POR MINUTO.
b
a
EL ERIZO SE ENCUENTRA MAREADO Y TEMBLANDO.
¡¡ESPERA, NO CORRAS!!
HAY QUE DETENERLO, A ESTE RITMO SERÁ UN GIGANTE EN 10 MINUTOS.
EL ERIZO SALE CORRIENDO DEL LABORATORIO.
EL ERIZO ES AHORA TAN ENORME COMO UN EDIFICIO...
¡ES SEMEJANTE AL ERIZO DE DINA! ¡PERO MUCHO MÁS FEO!
¡MIRA ESE ENORME ANIMAL, ES MONSTRUOSO!
EL ERIZO DESPIERTA DE SU HORRIBLE PESADILLA.
¡FUE SOLO UN SUEÑO!
INTELECTUM




UNIDAD 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

NOCIÓN DE CONJUNTO

Es una colección, agrupación o reunión de objetos bien definidos, los cuales pueden ser abstractos (números, letras, etc.) o concretos (personas, animales, etc.). Dichos objetos reciben el nombre de **elementos del conjunto**.

Ejemplos:
- Los tigres.
- Las vocales.
- Alumnos del 1.^{er} año de educación secundaria.
- Las letras de la palabra genio.

Notación	Representación gráfica
$A = \{g;\ e;\ n;\ i;\ o\}$ — Letra mayúscula: Nombre del conjunto. Letras minúsculas: Elementos del conjunto A (separados por punto y coma).	Diagrama de Venn - Euler (A: •g •e •n •i •o)



Observación

Para representar a los conjuntos se utilizan las letras mayúsculas A, B, C,... y para denotar a sus elementos se usan las letras minúsculas a, b, c,...

Diagrama de Venn – Euler
Son figuras geométricas cerradas que se utilizan para representar gráficamente a los conjuntos.

RELACIÓN DE PERTENENCIA

Si x es un elemento que forma parte del conjunto A, se dice que "x pertenece al conjunto A" y se denota por: $x \in A$

Pero si x no es un elemento de A, se dice que "x no pertenece al conjunto A" y se denota por: $x \notin A$

Ejemplo:

Sea el conjunto $I = \{1; 3; 5; 7\}$; entonces:
- $1 \in I$: 1 pertenece al conjunto I.
- $2 \notin I$: 2 no pertenece al conjunto I.
- $3 \in I$: 3 pertenece al conjunto I.
- $4 \notin I$: 4 no pertenece al conjunto I.
- $5 \in I$: 5 pertenece al conjunto I.
- $6 \notin I$: 6 no pertenece al conjunto I.
- $7 \in I$: 7 pertenece al conjunto I.
- $8 \notin I$: 8 no pertenece al conjunto I.

Atención

La relación de pertenencia es una relación exclusiva de elemento a conjunto.

Ejemplo:
Sean los conjuntos:
$M = \{1; 2; 3\}$
$N = \{2\}$
Es correcto: $2 \in M$
No es correcto: $N \in M$



DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Por extensión	Por comprensión
Es cuando se indican los elementos del conjunto. Ejemplos: • $P = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ • $R = \{1; 3; 5; 7\}$	Es cuando se indican características comunes a todos sus elementos. Ejemplos: • P = {Números naturales mayores que 3, pero menores que 9} • R = {Números naturales impares menores que 9}

Nota

Los conjuntos determinados por comprensión tienen la siguiente estructura:

A = { Forma general del elemento / (Tal que) Características comunes de los elementos }

Por ejemplo:
$P = \{x / x \in \mathbb{N};\ 3 < x < 9\}$
$R = \{2x + 1 / x \in \mathbb{N};\ x < 4\}$

CARDINAL DE UN CONJUNTO

Indica la cantidad de elementos que tiene el conjunto. Se denota por n(A) y se lee: "Cardinal de A".

Ejemplo: $A = \{1; 2; 3; 6\} \Rightarrow n(A) = 4$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

Inclusión

Sean A y B dos conjuntos. Decimos que A está incluido en B, o A es subconjunto de B, si se cumple que todos los elementos de A están contenidos en B.

Notación:
$A \subset B$; se lee: "A está incluido en B".
$A \not\subset B$; se lee: "A no está incluido en B".



Nota

Ten en cuenta la siguiente simbología:

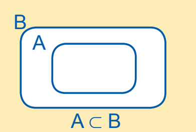
Símbolo	Se lee y significa
/	Tal que
∀	Para todo...
∃	Existe por lo menos un...
<	Menor que
>	Mayor que
≤	Menor o igual que
≥	Mayor o igual que
⇔	Si y solo si
∧	y
∨	o
⇒	Entonces

El símbolo ℕ representa al conjunto de los números naturales:

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$

Observación

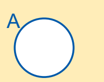
Generalmente, la relación de inclusión se representa gráficamente como:

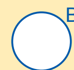




Atención

Sean A y B dos conjuntos disjuntos. Gráficamente, se representa:







Recuerda

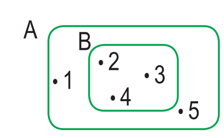
El vacío ∅ es subconjunto de todo conjunto.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$; $B = \{2; 3; 4\}$ y $C = \{6; 7\}$

Gráficamente:



Se tiene:
$B \subset A$: "B está incluido en A".
$C \not\subset A$: "C no está incluido en A".

Igualdad

Dados dos conjuntos A y B; estos serán iguales si uno está contenido en el otro y viceversa.
Es decir:

$$A = B \Longleftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

Ejemplo:

Dados los conjuntos:

$M = \{2x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 4\}$ y $N = \{0; 2; 4; 6\}$

Expresamos el conjunto M por extensión: $M = \{0; 2; 4; 6\}$
Se observa que $M \subset N$ y $N \subset M$, luego: $M = N$.

Conjuntos comparables

Dos conjuntos A y B son comparables cuando solamente uno de ellos está incluido en el otro, es decir, "o bien $A \subset B$ o bien $B \subset A$".

Ejemplo:

- $A = \{x / x$ es un mamífero$\}$
- $B = \{x / x$ es un conejo$\}$

Sabemos que $B \subset A$ (todo conejo es mamífero), pero $A \not\subset B$ (no todo mamífero es conejo). Por lo tanto, A y B son dos conjuntos comparables.

Conjuntos disjuntos

Dos conjuntos A y B son disjuntos cuando no tienen elementos comunes.

Ejemplo:

Sean los conjuntos:
$A = \{2; 4\}$ y $B = \{5; 8\}$

Se observa que A y B no tienen elementos comunes. Por lo tanto, A y B son disjuntos.

CONJUNTOS ESPECIALES



Conjunto vacío o nulo

Es aquel conjunto que carece de elementos y se denota por: $\varnothing$ o $\{\ \}$

Ejemplo:

$E = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x < 0\}$

Sabemos que no hay algún número natural menor que cero, entonces: $E = \varnothing = \{\ \}$

Conjunto unitario

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento.

Ejemplo:

$L = \{x / x \in \mathbb{N} \wedge x - 1 = 2\} = \{3\}$

Conjunto universal

Es aquel conjunto de referencia para el estudio de una situación particular, de modo que contenga a todos los conjuntos considerados. Se denota generalmente por **U** y se le representa gráficamente por un rectángulo.

Ejemplo:

- $T = \{x / x$ es un tigre$\}$
- $L = \{x / x$ es un leopardo$\}$

Un conjunto universal para T y L será: $U = \{x / x$ es un felino$\}$



Familia de conjuntos

Es aquel conjunto cuyos elementos son todos conjuntos.

Ejemplo:

C = {{1}; {2}; {2; 3}; {3}}

Conjunto potencia

El conjunto potencia de A, es aquel que está formado por todos los subconjuntos posibles que posee el conjunto A y se denota por P(A).

Ejemplo:

A = {p; q} $\Rightarrow$ P(A) = {∅; {p}; {q}; {p; q}}

Se observa que A tiene $4 = 2^2$ subconjuntos.

En general, para cualquier conjunto A se tiene:

$$\text{n.° de subconjuntos de } A = 2^{n(A)}$$

> **Nota**
>
> El conjunto:
> A = {1; 8; {10; 3}; {4}}
> No es una familia de conjuntos, ya que los elementos 1 y 8 no son conjuntos.



> **Nota**
>
> A cualquier subconjunto de A que no sea igual a este, se denomina **subconjunto propio de A**.
>
> Del ejemplo:
> ∅; {p}; {q} son subconjuntos propios de A.
>
> También observamos que A tiene $2^2 - 1$ subconjuntos propios.
>
> En general, para cualquier conjunto A se tiene:
>
> $$\text{n.° de subconjuntos propios de A} = 2^{n(A)} - 1$$

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Unión (∪)

Dados los conjuntos A y B, la unión de ellos es aquel conjunto formado por todos los elementos del conjunto A y por todos los elementos del conjunto B. Se denota:

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A, B	A, B	B, A A ∪ B = B

Intersección (∩)

Dados los conjuntos A y B, la intersección de ellos es el conjunto de todos aquellos elementos comunes al conjunto A y al conjunto B. Se denota:

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A, B	A, B A ∩ B = ∅	B, A A ∩ B = A

> **Nota**
>
> Sean A; B y C tres conjuntos disjuntos. Se cumple:
> n(A ∪ B) = n(A) + n(B)
> n(A ∪ B ∪ C) = n(A) + n(B) + n(C)



Diferencia (–)

Dados los conjuntos A y B, la diferencia de ellos es aquel conjunto cuyos elementos pertenecen a A, pero no a B. Se denota:

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A, B	A, B A – B = A	B, A A – B = ∅

> **Nota**
>
> Para dos conjuntos A y B cualesquiera, se cumple:
> n(A ∪ B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)
>
> Para dos conjuntos cualesquiera A y B, se cumple:
> n[P(A) ∩ P(B)] = n[P(A ∩ B)]



Nota

- Si $A \cap B \neq \varnothing$, entonces: $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $B \subset A' \Longleftrightarrow$ A y B son disjuntos.
- $B' \subset A \Longleftrightarrow A \subset B$
- $U' = \varnothing$
- $\varnothing' = U$

Diferencia simétrica (Δ)

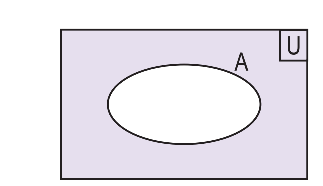
Dados los conjuntos A y B, la diferencia simétrica es el conjunto cuyos elementos pertenecen al conjunto $A \cup B$, pero no a $A \cap B$.

$$A \Delta B = \{x / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$$

No disjuntos	Disjuntos	Comparables
A, B	A, B $A \Delta B = A \cup B$	B, A $A \Delta B = B - A$

Complemento (A^c o A')

Dado un conjunto A, el complemento de A es el conjunto cuyos elementos no pertenecen a A.



$$A' = A^c = \{x / x \notin A\}$$



Ejemplo:
Sean los conjuntos:
$K = \{1; 3; 5\}$ y $L = \{1; 2; 4\}$

Entonces:
- $K \cup L = \{1; 2; 3; 4; 5\}$
- $K \cap L = \{1\}$
- $K \Delta L = \{2; 3; 4; 5\}$
- $K - L = \{3; 5\}$
- Un conjunto universal para K y L sería: $U = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Nota

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \varnothing$
- $\mathbb{Z}^+$ representa el conjunto de los números enteros mayores que cero, es decir: $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; ...\}$ donde $\mathbb{Z}^+ \subset \mathbb{Z}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$$

Conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{...; -2; -1; 0; 1; 2; ...\}$$

Conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z}; n \neq 0\right\}$$

Conjunto de los números irracionales ($\mathbb{I}$)

Son aquellos que tienen una representación decimal infinita no periódica y no pueden ser expresados como el cociente de dos números enteros.
Ejemplos:
$\pi = 3{,}141592654...$
$e = 2{,}7182818...$
$\sqrt{7} = 2{,}645751311...$

Conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$)

Es la reunión de los números racionales con los irracionales.

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

EFECTUAR



1. Analiza si es verdadero (V) o falso (F), según corresponda:
   - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
   - $\mathbb{R} = \mathbb{I} + \mathbb{Q}$
   - $\mathbb{Q} \subset \mathbb{I}$
   - $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$

2. Sean: $A = \{1; 3; 4; 5\}$ y $B = \{2; 4; 6; 8\}$
   Determina:
   $A \cup B =$
   $A \cap B =$
   $A \Delta B =$
   $A - B =$

Problemas resueltos

A

1 Sea el conjunto:
$K = \{\varnothing; \{q\}\}$
Halla el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
- $\varnothing \in K$ ▪ $\{q\} \in K$ ▪ $\varnothing \subset K$
- $q \in K$ ▪ $\{\varnothing\} \subset K$ ▪ $\{\{q\}\} \subset K$

Resolución:
- $\varnothing \in K$ (V)
  $\varnothing$ es un elemento del conjunto K.
- $q \in K$ (F)
  El conjunto K solo tiene dos elementos:
  $\varnothing$ y $\{q\}$, por lo tanto $q \notin K$.
- $\{q\} \in K$ (V)
  $\{q\}$ es un elemento del conjunto K.
- $\{\varnothing\} \subset K$ (V)
  $\varnothing$ es un elemento de K, entonces $\{\varnothing\}$ es un subconjunto de K.
- $\varnothing \subset K$ (V)
  $\varnothing$ es subconjunto de todo conjunto.
- $\{\{q\}\} \subset K$ (V)
  $\{q\}$ es un elemento del conjunto K, entonces $\{\{q\}\}$ es un subconjunto de K.

2 Calcula el número de elementos del conjunto D:
$$D = \left\{\frac{3x+1}{2} \in \mathbb{N} \,/\, 2 \leqslant x \leqslant 9 \wedge x \in \mathbb{N}\right\}$$

Resolución:
- $x = 2: \frac{3(2)+1}{2} = \frac{7}{2} \notin D$
- $x = 3: \frac{3(3)+1}{2} = \frac{10}{2} = 5 \in D$
- $x = 4: \frac{3(4)+1}{2} = \frac{13}{2} \notin D$
- $x = 5: \frac{3(5)+1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \in D$
- $x = 6: \frac{3(6)+1}{2} = \frac{19}{2} \notin D$
- $x = 7: \frac{3(7)+1}{2} = \frac{22}{2} = 11 \in D$
- $x = 8: \frac{3(8)+1}{2} = \frac{25}{2} \notin D$
- $x = 9: \frac{3(9)+1}{2} = \frac{28}{2} = 14 \in D$

Luego: $D = \{5; 8; 11; 14\}$
$\therefore$ D tiene 4 elementos.

3 Halla $b + c - a \in \mathbb{Z}^+$, sabiendo que los conjuntos B y C son conjuntos iguales.
$B = \{a - 1; 6 - a\}$
$C = \{1; b + c\}$

Resolución:
Como B y C son iguales, entonces se tienen los casos:

$a - 1 = 1$ $\vee$ $a - 1 = b + c$
$a = 2$ $\Rightarrow 6 - a = 1$
$\Rightarrow b + c = 6 - a$ $a = 5$
$b + c = 4$ $\Rightarrow b + c = 5 - 1$
$b + c = 4$

Para ambos casos:
$B = C = \{1; 4\}$

Nos piden:
$b + c - a \in \mathbb{Z}^+$
$\Rightarrow b + c - a = 4 - 2 = 2$

4 Sea el conjunto:
$A = \{x \,/\, y^0 = x\}$
¿Qué condiciones se deben cumplir para que el conjunto A sea unitario?
I. $y \in \mathbb{N}$
II. $y = 0$
III. $y > 3$

Resolución:
I. Si $y \in \mathbb{N}$, entonces y puede tomar el valor de cero, para lo cual 0^0 resulta indefinido.
II. Si $y = 0$: 0^0 es indefinido.
III. Si $y > 3$; entonces: $y^0 = 1$ (para cualquier valor de y mayor que 3)
$x = 1$
Luego: $A = \{1\}$
$\therefore$ Solo debe cumplir la condición III.

5 ¿Cuántos subconjuntos propios tiene el conjunto C?
$C = \{5; 7; \{5\}; 5; \{5\}; \{7\}; 7\}$

Resolución:
Primero calculamos el cardinal de C:
$C = \{5; 7; \{5\}; 5; \{5\}; \{7\}; 7\}$
$C = \{5; 7; \{5\}; \{7\}\}$
$\Rightarrow n(C) = 4$

Luego, nos piden:
$n[P(C)] = 2^{n(C)} = 2^4 = 16$
$\therefore$ n.° de subconjuntos propios $= 16 - 1 = 15$

6 Sean los conjuntos:
$A = \{3; 4; 5; 10\}$
$B = \{5; 7; 9; 11\}$
$C = \{5x \,/\, x \in \mathbb{N};\ 1 \leq x \leq 3\}$
Halla: $(A \cap C) - B$

Resolución:
Determinamos el conjunto C por extensión:
$C = \{5; 10; 15\}$

Entonces:
$A \cap C = \{3; 4; 5; 10\} \cap \{5; 10; 15\} = \{5; 10\}$

Luego:
$(A \cap C) - B = \{5; 10\} - \{5; 7; 9; 11\} = \{10\}$

7 Sean:
A = {4; 8; 13; 15}
B = {3; 5; 8; 13; 14}
Halla: A Δ B

Resolución:

Sabemos que: A Δ B = (A∪B) − (A∩B)

Entonces:
- A∪B = {4; 8; 13; 15} ∪ {3; 5; 8; 13; 14}
  A∪B = {3; 4; 5; 8; 13; 14; 15}
- A∩B = {8; 13}

Luego:
AΔB = (A∪B) − (A∩B)
= {3; 4; 5; 8; 13; 14; 15} − {8; 13}
= {3; 4; 5; 14; 15}

8 Si un conjunto A tiene 18 elementos, otro conjunto B tiene 24 elementos, ¿cuántos elementos tendrá A ∪ B sabiendo que A ∩ B tiene 15 elementos?

Resolución:

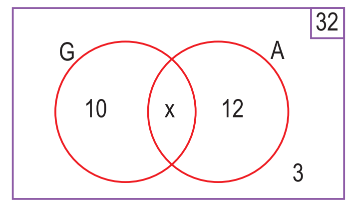
Por dato: n(A) = 18; n(B) = 24; n(A∩B) = 15

Sabemos que: n(A∪B) = n(A) + n(B) − n(A∩B)

Reemplazando: n(A∪B) = 18 + 24 − 15 = 27

9 En un salón de clases de 32 alumnos, 10 aprobaron solo Geometría, 12 aprobaron solo Aritmética. Si 3 personas no aprobaron ninguno de los cursos, ¿cuántos aprobaron Geometría y Aritmética?

Resolución:



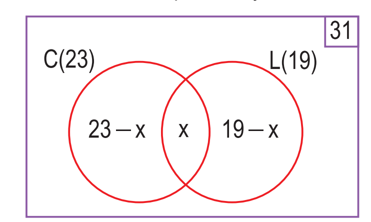
Entonces: 10 + x + 12 + 3 = 32
x = 7

∴ 7 alumnos aprobaron Geometría y Aritmética.

10 Un joven, durante todas las mañanas del mes de diciembre desayuna café y/o leche. Si durante 23 mañanas desayuna café y 19 toma leche, ¿cuántas mañanas desayuna café con leche?

Resolución:

Sea x el número de mañanas que desayuna café con leche.



Se cumple:
23 − x + x + 19 − x = 31
42 − x = 31 ⇒ x = 11
∴ 11 mañanas desayunó café con leche.

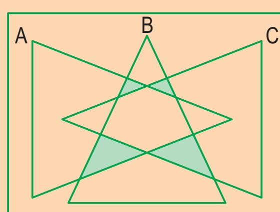
11 Si A = {3; {2; 8}; 5} da el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
I. Si X ∈ P(A) y n(X) = 4, entonces X ∩ A = {{2; 8}}.
II. Si X ∈ P(A), entonces x puede contener a {3}.
III. Si X = A ∩ {2; 8}, entonces X ∈ P(A).

Resolución:

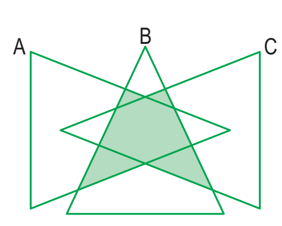
Se tiene:
P(A) = {∅; {3};{{8; 5}}; {5}; {3; {8; 5}}; {3; 5}; {{8; 5}; 5}; {3; {8; 5}; 5}}

Entonces:
I. (F) ya que si X ∈ P(A) y n(X) = 4, entonces:
X = {3; {8; 5}; 5} = A, luego: X ∩ A = A
II. (V) ya que si X = {3}, entonces X contiene al subconjunto {3}.
III. (V) X = A ∩ {8; 5} = ∅, entonces X = ∅ ∈ P(A).

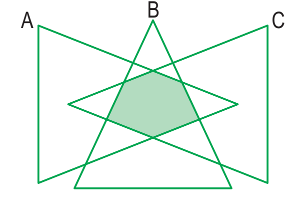
12 Escribe la operación que representala región sombreada en el gráfico:



Resolución:



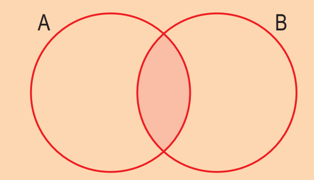
[(A ∪ C) ∩ B]



(A ∩ B ∩ C)

∴ [(A ∪ C) ∩ B] − (A ∩ B ∩ C)

13 De los siguientes conjuntos:
A = {1; 2; 3; 4; 5}, B = {2; 4; 6; 8}
Calcula el cardinal de la región sombreada.



Resolución:

La región sombreada es equivalente a A ∩ B.
A ∩ B = {2; 4}
⇒ n(A ∩ B) = 2

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES ($\mathbb{N}$)

A

NÚMEROS NATURALES

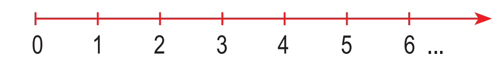
Son aquellos números que se emplean para contar, ordenar o medir.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ y se representa así:

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$$

Representación de los números naturales en la recta numérica



Del gráfico:

1.° El orden de los números naturales en la recta numérica nos permite establecer las relaciones "mayor que" y "menor que".

2.° El conjunto de los números naturales es infinito.

OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

Adición

Es la operación que consiste en agrupar dos o más cantidades denominadas sumandos en una sola cantidad denominada suma.

Ejemplo:

$8 + 12 + 120 = 140$ (Sumandos: 8, 12, 120; Suma: 140)

Sumandos: 8 + 14, 25; Suma → 47

Propiedades de la adición en $\mathbb{N}$

1. Clausura $\forall$ a, b $\in \mathbb{N}$: a + b $\in \mathbb{N}$ Ejemplo: $2 + 7 = 9 \in \mathbb{N}$	**3. Conmutativa** $\forall$ a, b $\in \mathbb{N}$: a + b = b + a Ejemplo: $5 + 7 = 7 + 5$
2. Asociativa $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{N}$: (a + b) + c = a + (b + c) Ejemplo: $(3 + 5) + 8 = 3 + (5 + 8)$	**4. Elemento neutro aditivo** $\forall$ a $\in \mathbb{N}$: a + 0 = 0 + a = a Ejemplo: $11 + 0 = 0 + 11 = 11$

Sustracción

Es la operación en la que, dadas dos cantidades denominadas minuendo (M) y sustraendo (S), donde (M > S), se debe determinar una tercera cantidad denominada diferencia (D). Es decir:

$$M - S = D$$

Ejemplo:

$275 - 143 = 132$ (Minuendo, Sustraendo, Diferencia)

Minuendo → 275 −
Sustraendo → 143
Diferencia → 132

También se cumple: $M = S + D$; $S = M - D$

Multiplicación

Es la operación que consiste en repetir como sumando una cantidad denominada multiplicando, tantas veces como lo indica otra cantidad denominada multiplicador, obteniendo un resultado llamado producto.

Ejemplo:

$\underbrace{8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8}_{7 \text{ sumandos}} = 8 \times 7 = 56$

(8: Multiplicando; 7: Multiplicador; 56: Producto)

Observación

Números pares:
0; 2; 4; 6; 8; ...
Números impares:
1; 3; 5; 7; 9; ...

Para facilitar la resolución de problemas se considera al cero como número par.



Nota

Sumas notables

$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n(n + 1)$

$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Propiedad

Sean a, b y c $\in \mathbb{N}$.
Si $a = b \Rightarrow a + c = b + c$
Si $a + c = b + c \Rightarrow a = b$

Ejemplo:
$2 = 1 + 1 \Rightarrow 2 + 3 = 1 + 1 + 3$
$4 + 7 = 3 + 1 + 7 \Rightarrow 4 = 3 + 1$

Recuerda

La suma de términos de una sustracción es igual al doble del minuendo. Es decir:
$M + S + D = 2M$



Atención

Potenciación en ℕ

$P = \underbrace{b \times b \times ... \times b}_{n \text{ veces}} = b^n$; $b, n \in \mathbb{N}$

donde:
b es la base
n es el exponente
P es la potencia

Además:
- $b^1 = b$
- $b^0 = 1$; $b \neq 0$

Radicación en ℕ

Para a, b, n ∈ ℕ se cumple:
$a^n = b \Rightarrow a = \sqrt[n]{b}$; $n > 1$

Recuerda

Propiedades de la división

$0 < \text{residuo} < d$
$\text{residuo}_{máx.} = d - 1$
$\text{residuo}_{mín.} = 1$
$r_d + r_e = d$

Observación

En el ejemplo se observa que el residuo por exceso (r_e) es "lo que le falta a 38 para ser igual a 70".



Nota

Signos de colección

Si en la expresión aparecen los signos de colección: ( ); [ ] y { }; las operaciones que se encuentran dentro de los signos se resolverán en el siguiente orden:
1.° ( )
2.° [ ]
3.° { }

Propiedades de la multiplicación en ℕ

1. Clausura $\forall$ a, b ∈ ℕ: $a \times b \in \mathbb{N}$ Ejemplo: $3 \times 4 = 12 \in \mathbb{N}$	**4. Elemento neutro multiplicativo** $\forall$ a ∈ ℕ: $a \times 1 = 1 \times a = a$ Ejemplo: $9 \times 1 = 1 \times 9 = 9$
2. Asociativa $\forall$ a, b, c ∈ ℕ: $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ Ejemplo: $(5 \times 7) \times 2 = 5 \times (7 \times 2)$	**5. Distributiva** $\forall$ a, b, c ∈ ℕ: $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ Ejemplo: $4 \times (8 + 11) = 4 \times 8 + 4 \times 11$
3. Conmutativa $\forall$ a, b ∈ ℕ: $a \times b = b \times a$ Ejemplo: $4 \times 8 = 8 \times 4$	

División

Es la operación que nos permite determinar cuántas veces, una cantidad llamada divisor (d) está contenida en otra cantidad denominada dividendo (D). A la cantidad que se va a determinar se le llama cociente (q).

Clases de división

Exacta	Inexacta	
	Por defecto	Por exceso
688 | 16 64 43 48 48 – $688 = 16 \times 43$ En general: D | d q $D = d \times q$	738 | 35 70 21 → Cociente por defecto (q) 38 35 3 → Residuo por defecto (r_d) En general: D | d r_d q $D = d \times q + r_d$; $d > r_d$	738 | 35 70 22 → Cociente por exceso (q_e) (–) 38 70 32 → Residuo por exceso (r_e) En general: D | d r_e q + 1 $D = d \times (q + 1) - r_e$; $d > r_e$

Operaciones combinadas en ℕ

Cuando en una expresión aparecen dos o más operaciones, las efectuaremos según el orden siguiente:

1.° Operamos las potencias y las raíces.

2.° Operamos las multiplicaciones y divisiones.

3.° Operamos las adiciones y sustracciones.

Ejemplos:

1. $4 \times 23 + 2^2 - \sqrt{81} + 10 \div 5$
$4 \times 23 + 4 - 9 + 10 \div 5$
$92 + 4 - 9 + 2$
$96 - 9 + 2$
$87 + 2$
89

2. $\{3 \times [4^2 + (\sqrt{9} + 5) \div 4] + 11\} \div 5$
$\{3 \times [16 + 8 \div 4] + 11\} \div 5$
$\{3 \times [18] + 11\} \div 5$
$\{54 + 11\} \div 5$
$\{65\} \div 5$
13

EFECTUAR

1. Analiza verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

   I. $5 < 4$
   II. $b^0 = 1$, $\forall$ b ∈ ℕ
   III. $d > r_{máx}$
   IV. $M = S + D$

2. Simplifica:

   a. $\{6 \times [(5 + 2^2) \div 3] - 10 \div 2\} - 3^2$
   b. $7 \times \sqrt{25} + 4^2 - \sqrt{64} \div 2^3$

Problemas resueltos

A

1 Se tienen tres números a, b, n $\in \mathbb{N}$ con a > b; halla el valor de n.
$n = (a + b)(a - b)$

Resolución:

Tenemos: $n = (a + b)(a - b)$

Por la propiedad distributiva:

$(a + b)(a - b) = (a + b) \times a - (a + b) \times b$

Seguimos aplicando la propiedad distributiva:

$$n = (a + b)(a - b) = (a + b) \times a - (a + b) \times b$$
$$= a \times a + b \times a - (a \times b + b \times b)$$
$$= a^2 + b \times a - a \times b - b^2$$
$$= a^2 + a \times b - a \times b - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$
$$\Rightarrow n = a^2 - b^2$$
$$\therefore a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

A esta expresión se le conoce como diferencia de cuadrados.

2 Halla:
$\sqrt{7^{56 \div (1+2+3+4+5+6+7)}} + 11 \times 41 - 20$

Resolución:

Tenemos: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$

Luego: $\sqrt{7^{56 \div 28}} + 451 - 20$

$\sqrt{7^2} + 451 - 20 = 7 + 451 - 20 = 458 - 20 = 438$

3 Resuelve:
$\sqrt{361} \times 2 + 27 \div [7 \times 2 - (10 + 5) \div 3] - 4$

Resolución:

$$\sqrt{361} \times 2 + 27 \div [7 \times 2 - (10 + 5) \div 3] - 4$$
$$= \sqrt{361} \times 2 + 27 \div [7 \times 2 - 15 \div 3] - 4$$
$$= 19 \times 2 + 27 \div [14 - 5] - 4$$
$$= 19 \times 2 + 27 \div 9 - 4$$
$$= 38 + 3 - 4$$
$$= 41 - 4$$
$$= 37$$

4 Resuelve:
$120 \div \left[\left(\sqrt{25 - 3^2} \times 3 + 8\right) \div 5 + 6\right]$

Resolución:

$$= 120 \div \left[\left(\sqrt{25 - 3^2} \times 3 + 8\right) \div 5 + 6\right]$$
$$= 120 \div \left[\left(\sqrt{25 - 9} \times 3 + 8\right) \div 5 + 6\right]$$
$$= 120 \div [(4 \times 3 + 8) \div 5 + 6]$$
$$= 120 \div [20 \div 5 + 6]$$
$$= 120 \div [4 + 6]$$
$$= 120 \div 10$$
$$= 12$$

5 En una división inexacta, si al residuo se le sumara 22 unidades, este sería máximo y si se le restara 9 unidades, este sería mínimo. Además, el cociente es la mitad del residuo. Calcula el dividendo.

Resolución:

Sabemos que:

$r_{máx.} = d - 1 \wedge r_{mín.} = 1$

Por dato:

$r + 22 = d - 1$ $\qquad r - 9 = 1$

$r + 23 = d$ ...(I) $\qquad r = 10$ ...(II)

Luego, de (I) y (II):

$r = 10$

$d = 10 + 23 \Rightarrow d = 33$

Además:

$q = \dfrac{r}{2} = \dfrac{10}{2} = 5$

Por lo tanto:

$D = dq + r$

$D = 33 \times 5 + 10 \Rightarrow D = 165 + 10 \therefore D = 175$

6 Halla:
$S = 2 + 1 + 4 + 4 + 6 + 9 + 8 + 16 + ... + 24 + 144$

Resolución:

$$S = (2 + 4 + 6 + 8 + ... + 24) + (1 + 4 + 9 + 16 + ... + 144)$$
$$S = 2(1 + 2 + 3 + ... + 12) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + 12^2)$$
$$S = 12 \times 13 + \frac{12 \times 13 \times 25}{6}$$
$$S = 156 + 650$$
$$S = 806$$

7 Calcula a + b, si:
$1 + 2 + 3 + 4 + ... + a = 120$
$1 + 3 + 5 + ... + b = 121$

Resolución:

Sabemos que:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + ... + m = \left(\frac{m+1}{2}\right)^2$$

Reemplazando:

$$\frac{a(a+1)}{2} = 120 \Rightarrow a(a + 1) = 15(16)$$

$\Rightarrow a = 15$

$$\left(\frac{b+1}{2}\right)^2 = 121 \Rightarrow \frac{b+1}{2} = 11 \Rightarrow b = 21$$

Piden:

$a + b = 15 + 21 = 36$

NUMERACIÓN

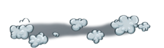
Nota
Las cifras que emplearemos para la formación de numerales son: 0; 1; 2; 3; ...

Atención
En el ejemplo, diremos que en el numeral 8723; la cifra 8 es de orden 3 y 1.er lugar, la cifra 7 es de orden 2 y 2.° lugar, la cifra 2 es de orden 1 y 3.er lugar; y la cifra 3 es de orden 0 y 4.° lugar.



Recuerda
La base, siempre será un número natural mayor que 1.





Nota
En un sistema de numeración de base n, la cifra máxima será (n – 1).

DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la formación, lectura y escritura correcta de los números.

Conceptos previos

Número. Es la idea asociada a la cantidad que nos permite cuantificar los objetos de la naturaleza.
Numeral. Es la representación simbólica de un número.
Cifra. Son los símbolos que convencionalmente se utilizan en la formación de los numerales.

SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN

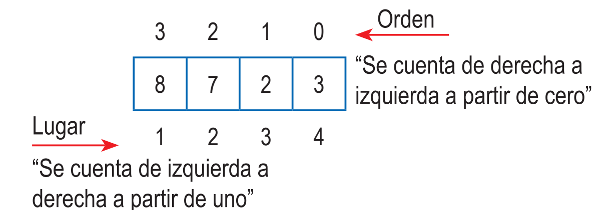
Es el conjunto de reglas y principios que nos permitirán comprender cómo es la formación de un numeral que se quiere representar.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Principio de orden y lugar

Toda cifra que conforma un numeral tiene asociado un **orden** y un **lugar**.

Ejemplo:
Sea el numeral 8723, entonces:



Principio de la base

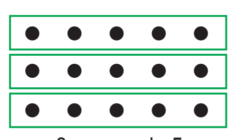
Todo numeral quedará expresado en una determinada base (mayor que la unidad), la cual nos indica de cuánto en cuánto agrupamos las unidades de un cierto orden para obtener unidades del orden inmediato superior.

Ejemplo:
Expresa 15 unidades en las bases: 6; 5 y 3
Resolución:

- En base 6:

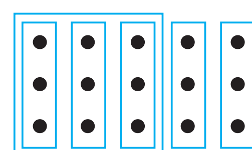
2 grupos de 6, sobró 3 unidades: $23_{(6)}$

- En base 5:



3 grupos de 5, sobró 0 unidades: $30_{(5)}$

- En base 3:



1 conjunto de 3, 2 grupos de 3, sobró 0 unidades: $120_{(3)}$

Por lo tanto, observamos: $15 = 23_{(6)} = 30_{(5)} = 120_{(3)}$

Principio de la cifra

Toda cifra que conforma un numeral, es menor que la base.

Sistemas de numeración más utilizados

BASE	NOMBRE	CIFRAS QUE UTILIZA
2	Binario	0; 1
3	Ternario	0; 1; 2
4	Cuaternario	0; 1; 2; 3
5	Quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	Senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	Heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6



8	Octanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	Nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	Decimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	Undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	Duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)

Consideraciones

1. En una igualdad de numerales, a mayor numeral aparente le corresponde menor base; y, análogamente, a menor numeral aparente le corresponde mayor base.
2. Las cifras permitidas en la base n son: 0; 1; 2; ...; (n – 1).
3. El número de cifras que se puede utilizar para la formación de numerales en cierta base es igual a la base.

Principio del valor de las cifras

Toda cifra que forma parte de un numeral tiene dos valores.

Valor absoluto (V. A.)	Valor relativo (V. R.)
Es el valor que toma una cifra. Su valor no cambia, al cambiar la cifra de orden. Ejemplo: Sea el número 4236, entonces: V. A. (4) = 4 V. A. (2) = 2 V. A. (3) = 3 V. A. (6) = 6	Es el valor que toma una cifra por el orden que ocupa en el numeral. Su valor cambia, al cambiar la cifra de orden. Para el ejemplo anterior: V. R. (4) = 4×10^3 V. R. (2) = 2×10^2 V. R. (3) = 3×10^1 V. R. (6) = 6×10^0

Nota

Menor representación — Mayor representación

$413_{(8)} = 2032_{(5)}$

Mayor base — Menor base

En la práctica:

$\overset{-}{413}_{\underset{+}{(8)}} = \overset{+}{2032}_{\underset{-}{(5)}}$



Observación

Solo para la última cifra de un numeral, su valor absoluto coincidirá con su valor relativo.

Nota

Del ejemplo, se puede observar que:
4236 = V. R. (4) + V. R. (2) + V. R. (3) + V. R. (6)

REPRESENTACIÓN LITERAL DE UN NÚMERO

Cuando las cifras de un numeral no se conozcan, estas se van a representar por medio de letras minúsculas, teniendo en cuenta que:

1. Toda expresión que esté entre paréntesis representará una cifra.

   Ejemplos:
   - $\overline{(a+4)(b+5)}$
   - $\overline{(b+7)(c+1)(2a)}$
   - $\overline{(a-3)(2m)(p+1)}$

2. La primera cifra de un numeral debe ser distinta de cero.

   Ejemplo: $\overline{xyz}$: 100; 101; 102; 103; ...; 999

   ↓ ↓ ↓
   1 0 0
   2 1 1
   ⋮ ⋮ ⋮
   9 9 9

3. Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, salvo que se indique.

   Ejemplo:
   Si el numeral $\overline{ab}$ es mayor que 21, pero menor que 24, entonces:

   $21 < \overline{ab} < 24$
   22
   23

   Luego, los valores que $\overline{ab}$ puede tomar son 22 y 23.

Atención

Cada cifra del numeral va a ser representada por una letra minúscula; todas ellas van a estar cubiertas por una barra horizontal para distinguirlas de las expresiones algebraicas.

Ejemplo:

$\overline{ab}_{(2)}$: $10_{(2)}$; $11_{(2)}$

$\overline{2a}_{(4)}$: $20_{(4)}$; $21_{(4)}$; $22_{(4)}$; $23_{(4)}$



DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA DE UN NUMERAL

Todo numeral se puede descomponer como polinomio, es decir; como la suma de los valores relativos de las cifras.

Ejemplos:

- $314 = 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4$
- $6143_{(9)} = 6 \times 9^3 + 1 \times 9^2 + 4 \times 9^1 + 3$
- $526_{(7)} = 5 \times 7^2 + 2 \times 7^1 + 6$
- $\overline{abcde}_{(n)} = a \times n^4 + b \times n^3 + c \times n^2 + d \times n^1 + e$

Nota

Numeral capicúa. Son aquellos numerales cuyas cifras equidistantes son iguales.

Ejemplos:
$55_{(7)}$; $515_{(8)}$; $4114_{(9)}$; $\overline{abcba}_{(n)}$



Nota

La descomposición polinómica también se puede realizar por bloques.

Ejemplos:

$\overline{abab}_{(7)} = \overline{ab}_{(7)} \times 7^2 + \overline{ab}_{(7)}$

$\overline{abc21} = \overline{abc} \times 100 + 21$

$\overline{mma}_{(n)} = \overline{mn}_{(n)} \times n + a$

Atención

Cambio de base: de base diferente de diez a base diferente de diez
En este caso se convierte el número de base $n \neq 10$ a base 10; y el resultado se convierte a base $m \neq 10$.



Nota

Caso particular:

$$\left.\begin{matrix}\overline{1a}\\ \overline{1a}\\ \overline{1a}\\ \vdots\\ \overline{1a}_{(n)}\end{matrix}\right\} m \text{ veces} = n + ma$$

Nota

En el sistema de numeración de base 10 se utilizan 10 cifras.

Recuerda

U : unidad
D : decena
C : centena
UM : unidad de millar
DM : decena de millar
CM : centena de millar
UMi : unidad de millón
DMi : decena de millón
CMi : centena de millón
UMMi : unidad de millar de millón
DMMi : decena de millar de millón
CMMi : centena de millar de millón

CAMBIOS DE BASE

De base n a base 10

Ejemplo:
Convertir $524_{(6)}$ a base 10.

Por descomposición polinómica

$524_{(6)} = 5 \times 6^2 + 2 \times 6^1 + 4$

$524_{(6)} = 180 + 12 + 4$

$524_{(6)} = 196$

Por Ruffini

	5	2	4
6	↓	30	192
	5	32	196

$524_{(6)} = 196$

De base 10 a base n

Ejemplo:
Convertir 1310 a base 8.

Resolución:

1310 ÷ 8 = 163, residuo 6
163 ÷ 8 = 20, residuo 3
20 ÷ 8 = 2, residuo 4
cociente final 2

$1310 = 2436_{(8)}$

PROPIEDADES

Numeral de cifras máximas

$99 = 10^2 - 1$ $\qquad 22_{(3)} = 3^2 - 1 = 8$

$999 = 10^3 - 1$ $\qquad 222_{(3)} = 3^3 - 1 = 26$

$9999 = 10^4 - 1$ $\qquad 2222_{(3)} = 3^4 - 1 = 80$

En general:

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{(n)}}_{k \text{ cifras}} = n^k - 1$$

Bases sucesivas

$$19_{18_{15_{16_{(n)}}}} = 19_{18_{15_{(n+6)}}} = 19_{18_{(n+6+5)}} = 19_{(n+6+5+8)} = n + 6 + 5 + 8 + 9$$

En general:

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\ddots_{\overline{1m}_{(n)}}}}} = n + a + b + c + \ldots + m$$

SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Es el sistema de numeración que usamos a diario, cuyas principales características son:

1. La base del sistema de numeración decimal es 10.
2. Las cifras que se utilizan en este sistema son: 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
3. Cada orden tiene una determinada denominación:
   Orden 0: unidades
   Orden 1: decenas
   Orden 2: centenas
   Orden 3: millares
4. Diez unidades de un orden cualquiera forman una unidad del orden inmediato superior, es decir:
   1 decena = 10 unidades
   1 centena = 10 decenas
   1 unidad de millar = 10 centenas
   1 decena de millar = 10 millares
   1 centena de millar = 10 decenas de millar
   1 unidad de millón = 10 centenas de millar

TABLERO POSICIONAL

ORDEN	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
	CMMi	DMMi	UMMi	CMi	DMi	UMi	CM	DM	UM	C	D	U
						5	4	7	2	8	7	9
	10^{11}	10^{10}	10^9	10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0

En el numeral 5 472 879:

- V. R. (9) = 9U = $9 \times 10^0 = 9$
- V. R. (7) = 7D = $7 \times 10^1 = 70$
- V. R. (8) = 8C = $8 \times 10^2 = 800$
- V. R. (2) = 2UM = $2 \times 10^3 = 2000$
- V. R. (7) = 7DM = $7 \times 10^4 = 70\,000$
- V. R. (4) = 4CM = $4 \times 10^5 = 400\,000$
- V. R. (5) = 5UMi = $5 \times 10^6 = 5\,000\,000$

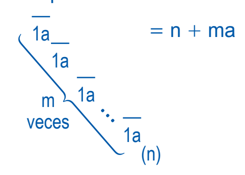
DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO

Todo número se puede expresar como la suma de los valores relativos de sus cifras (descomposición polinómica).

Ejemplo: Para el numeral 5 472 879:

5 472 879 = V. R. (5) + V. R. (4) + V. R. (7) + V. R. (2) + V. R. (8) + V. R. (7) + V. R. (9)

5 472 879 = 5 000 000 + 400 000 + 70 000 + 2000 + 800 + 70 + 9



Problemas resueltos

A

1 Calcula m × n, si: $\overline{6mn} = 26 \times \overline{mn}$

Resolución:

Empleamos la descomposición polinómica por bloques, así:

$\overline{6mn} = 6 \times 10^2 + \overline{mn} = 600 + \overline{mn}$

Reemplazamos en la expresión:

$600 + \overline{mn} = 26 \times \overline{mn}$

$600 = 26 \times \overline{mn} - \overline{mn}$

$600 = 25 \times \overline{mn}$

$\Rightarrow \overline{mn} = \dfrac{600}{25}$

$\overline{mn} = 24$

Luego: m = 2; n = 4

Nos piden: $m \times n = 2 \times 4 = 8$

2 Halla n, si: $\overline{3n}_{(n+1)} = 27$

Resolución:

Por descomposición polinómica, tenemos:

$\overline{3n}_{(n+1)} = 3 \times (n+1) + n = 3n + 3 + n = 4n + 3$

En la expresión: $\overline{3n}_{(n+1)} = 27$

$4n + 3 = 27$

$4n = 24$

$n = 6$

3 Si: $213_{(4)} = \overline{ab}$

Calcula: $a^3 - b$

Resolución:

Expresamos $213_{(4)}$ en base 10:

$213_{(4)} = 2 \times 4^2 + 1 \times 4 + 3 = 2 \times 16 + 4 + 3 = 39$

Luego, reemplazamos:

$213_{(4)} = \overline{ab}$

$39 = \overline{ab}$

$\Rightarrow a = 3; b = 9$

Nos piden:

$a^3 - b = 3^3 - 9 = 27 - 9 = 18$

4 Expresa $216_{(7)}$ en base 9.

Resolución:

En este caso, primero se convierte el número de base 7 a base 10 y el resultado se pasa a base 9.

- De base 7 a base 10:

  $216_{(7)} = 2 \times 7^2 + 1 \times 7 + 6$

  $216_{(7)} = 111$

- De base 10 a base 9:

```
111 |_9
 9    12 |_9
 21    9   (1)
 18   (3)
 (3)
```

Luego: $216_{(7)} = 133_{(9)}$

5 Halla x, si: $\overline{x23}_{(6)} = 315_{(7)}$

Resolución:

Por descomposición polinómica:

$\overline{x23}_{(6)} = 315_{(7)}$

$x \times 6^2 + 2 \times 6 + 3 = 3 \times 7^2 + 1 \times 7 + 5$

$36x + 12 + 3 = 147 + 7 + 5$

$36x + 15 = 159$

$36x = 144$

$x = 4$

6 Halla n, si:

$1111_{(n)} = 26 \times (n + 1)$

Resolución:

Por descomposición polinómica:

$1111_{(n)} = 26 \times (n + 1)$

$\underbrace{n^3 + n^2} + n + 1 = 26 \times (n + 1)$

$n^2 \times (n + 1) + n + 1 = 26 \times (n + 1)$

$(n + 1)(n^2 + 1) = 26 \times (n + 1)$

$n^2 + 1 = 26$

$n^2 = 25$

$n = 5$

7 Si los numerales $\overline{a33a}_{(9)}$; $\overline{462}_{(b)}$; $\overline{bbb1}_{(a)}$ están correctamente escritos, halla: $a^2 + b^2$

Resolución:

En el numeral $\overline{a33a}_{(9)}$ se observa: $a < 9$ ...(I)

En el numeral $\overline{462}_{(b)}$ se observa: $6 < b$ ...(II)

En el numeral $\overline{bbb1}_{(a)}$ se observa: $b < a$ ...(III)

De (I), (II) y (III): $6 < b < a < 9$

$\qquad\qquad\qquad\quad\ \downarrow\ \ \ \downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\quad\ 7\ \ \ 8$

Nos piden:

$a^2 + b^2 = 8^2 + 7^2 = 64 + 49 = 113$

8 El mayor número de 4 cifras del sistema de base n se escribe en el sistema heptanario como 143. Halla n.

Resolución:

El mayor número de 4 cifras en base n es:

$\overline{(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)} = n^4 - 1$

Del enunciado:

$n^4 - 1 = 143_{(7)}$

$n^4 - 1 = 7^2 + 4 \times 7 + 3$

$n^4 - 1 = 80$

$n^4 = 81$

$n = 3$

9 Si $35554_{(x)} = 62231_{(y)}$; $x < 9$; halla: $x + y$

Resolución:

Recuerda que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y a menor numeral aparente mayor base, entonces:

$$\overset{-}{3\,5\,5\,5\,4}\,{}_{(x)} = \overset{+}{6\,2\,2\,3\,1}\,{}_{(y)}$$
$$\quad\;\;+ \qquad\qquad -$$

Luego: $6 < y < x < 9$

$y \downarrow 7$, $x \downarrow 8$

Nos piden: $x + y = 8 + 7 = 15$

10 En una isla hay $\overline{abc}$ seres vivientes, de los cuales $\overline{a0c}$ son hombres, $\overline{ab}$ son mujeres, a son perros y c son gatos. Si el número de habitantes está comprendido entre 150 y 300, ¿cuántos humanos hay?

Resolución:

Del enunciado:

$150 < \overline{abc} < 300$

$\Rightarrow$ a: 1; 2

También:

$$\overline{a0c} + \overline{ab} + a + c = \overline{abc}$$
$$100a + c + 10a + b + a + c = 100a + 10b + c$$
$$11a + c = 9b$$

Si $a = 1$: $11 + c = 9b$

Para $b = 1$: $11 + c = 9 \Rightarrow c = -2$ ✗

Para $b = 2$: $11 + c = 18 \Rightarrow c = 7$ ✓

Para $b = 3$: $11 + c = 27 \Rightarrow c = 16$ ✗

Luego: $\overline{abc} = 127 < 150$ (no cumple)

Si $a = 2$: $22 + c = 9b$

Para $b = 1$: $22 + c = 9 \Rightarrow c = -13$ ✗

Para $b = 2$: $22 + c = 18 \Rightarrow c = -4$ ✗

Para $b = 3$: $22 + c = 27 \Rightarrow c = 5$ ✓

Para $b = 4$: $22 + c = 36 \Rightarrow c = 14$ ✗

Luego: $\overline{abc} = 234$ (sí cumple)

Nos piden el número de humanos:

$204 + 23 = 227$

11 Si $\overline{abba} \div 2 = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2b)(2b)}$

Halla el valor de $a \times b$.

Resolución:

Del enunciado:

$$\overline{abba} \div 2 = \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2b)(2b)}$$

$$\overline{abba} = 2 \times \overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2b)(2b)}$$

$$1001a + 110b = 2\left[1100\left(\frac{a}{2}\right) + 11(2b)\right]$$

$$1101a + 110b = 1100a + 44b$$
$$66b = 99a$$
$$2b = 3a \Rightarrow b = \frac{3a}{2}$$

Como el numeral de la forma $\overline{\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)(2b)(2b)}$, está definido en el sistema decimal, entonces $a = 2$ y $b = 3$.

Nos piden: $a \times b = 2 \times 3 = 6$

12 Si el número $N = \overline{mn}$ es x veces la suma de sus cifras, ¿cuántas veces el número $\overline{nm}$ será la suma de sus cifras en función de N y dicha suma?

Resolución:

Del enunciado: $\overline{mn} = x(m + n)$ ... (I)

$$\Rightarrow x = \frac{\overline{mn}}{m + n}$$

Se tiene: $\overline{nm} = y(m + n)$ ... (II)

Sumando (I) y (II): $\overline{mn} + \overline{nm} = (x + y)(m + n)$

$$11(m + n) = (x + y)(m + n)$$
$$11 = x + y$$
$$\Rightarrow y = 11 - x$$
$$y = 11 - \frac{N}{m + n}$$

13 Halla un número capicúa par de tres cifras sabiendo que la suma de sus cifras es 10 y que la cifra de las decenas es mayor que la cifra de las centenas.

Resolución:

Sea $\overline{aba}$ dicho numeral capicúa.

Del enunciado: $2a + b = 10$, $b > a$

Como a es par y b es una cifra (número natural), entonces a puede tomar los valores: 2 y 4

Si $a = 2$: $4 + b = 10 \Rightarrow b = 6$

Si $a = 4$: $8 + b = 10 \Rightarrow b = 2$ (no cumple ya que $a < b$)

Luego: $\overline{aba} = 262$

14 De un grupo de $\overline{(a + 4)bc}$ personas que asistieron a una conferencia se sabe que $\overline{bac}$ son africanos, $\overline{bca}$ son peruanos y $\overline{ba}$ son ingleses. ¿Cuántos no son ingleses?

Resolución:

Se cumple: $\overline{bac} + \overline{bca} + \overline{ba} = \overline{(a + 4)bc}$

$$100b + 10a + c + 100b + 10c + a + 10b + a = 100a + 400 + 10b + c$$

$$200b + 10c = 88a + 400$$
$$\ldots 00 + \ldots 0 = 88a + \ldots 0$$
$$\ldots 0 = 88a$$

$a \downarrow 5$

Luego: $200b + 10c = 440$

$$20b + c = 44$$

$b \downarrow 4$, $c \downarrow 4$

Nos piden: $\overline{bac} + \overline{bca} = 454 + 445 = 899$

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS ($\mathbb{Z}$)

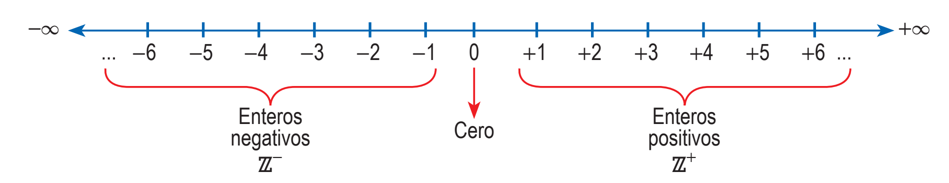
A

El conjunto de los números enteros es una generalización del conjunto de los números naturales; formado por los números positivos, números negativos (números que resultan de restar a un número natural otro mayor) y el cero (0).

Notación:
El conjunto de los números enteros se denota por: $\mathbb{Z} = \{...; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

REPRESENTACIÓN EN LA RECTA NUMÉRICA

El conjunto de los números enteros se puede representar gráficamente en una línea recta.



VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO ENTERO

El valor absoluto de un número entero a se denota por |a| y se define: $|a| = \begin{cases} a; \text{ si } a > 0 \\ 0; \text{ si } a = 0 \\ -a; \text{ si } a < 0 \end{cases}$

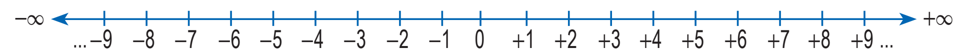
Ejemplos:

- $|5| = 5$; ya que $5 > 0$.
- $|-4| = -(-4) = 4$; ya que $-4 < 0$.
- $|0| = 0$
- $|-12| = -(-12) = 12$; ya que $-12 < 0$.

COMPARACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

Dados dos números enteros a y b, tal que $a \neq b$; a será mayor que b, si en la recta numérica a está ubicado a la derecha de b.

Ejemplo:
En la recta numérica:



Observamos:

- +4 está a la derecha de +1; entonces: $+1 < +4$
- +5 está a la derecha de −3; entonces: $-3 < +5$
- −4 está a la derecha de −9; entonces: $-9 < -4$
- 0 está a la derecha de −7; entonces: $-7 < 0$

NÚMEROS ENTEROS OPUESTOS

Dos números enteros son opuestos cuando tienen el mismo valor absoluto, pero signos diferentes.

Ejemplos:

- −3 es el opuesto de +3 ➡

−3 −2 −1 0 +1 +2 +3

(−3) y (+3) son opuestos

- +4 es el opuesto de −4 ➡

−4 −3 −2 −1 0 +1 +2 +3 +4

(−4) y (+4) son opuestos

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

Adición

Para sumar dos números enteros se debe tener en cuenta las siguientes reglas:

1. Para sumar dos números enteros con signos iguales, se suman sus valores absolutos y al resultado se le antepone el signo de los sumandos.



Observación

El conjunto de los números enteros positivos se denota por:
$\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; ...\}$

El conjunto de los números enteros negativos se denota por:
$\mathbb{Z}^- = \{...; -4; -3; -2; -1\}$

El conjunto de los números enteros se puede expresar como:
$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$

Al conjunto de números enteros diferentes de cero, se le denota:
$\mathbb{Z} - \{0\} = \{...; -3; -2; -1; 1; 2; 3; ...\}$

Recuerda

El conjunto de los números naturales está incluido en el conjunto de los números enteros:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$



Nota

Se puede concluir que:
$\mathbb{Z} - \mathbb{Z}^- = \{0; 1; 2; 3; ...\} = \mathbb{N}$

Atención

Términos de una adición:

$A + B = S$

Sumandos Suma

Ejemplos:

- $(+8) + (+11) = +(8 + 11) = +19$
- $(-7) + (-10) = -(7 + 10) = -17$
- $(+21) + (+33) = +(21 + 33) = 54$
- $(-17) + (-19) = -(17 + 19) = -36$

2. Para sumar dos números enteros de signos diferentes, se restan sus valores absolutos (el mayor menos el menor) y al resultado se le antepone el signo del sumando con mayor valor absoluto.

Ejemplos:

- $(-18) + (+23) = +(23 - 18) = +5$
- $(+45) + (-30) = +(45 - 30) = +15$
- $(-32) + (+9) = -(32 - 9) = -23$
- $(+60) + (-120) = -(120 - 60) = -60$

Propiedades de la adición

1. Clausura $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b $\in \mathbb{Z}$ **2. Asociativa** $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$: a + (b + c) = (a + b) + c **3. Conmutativa** $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a + b = b + a	**4. Elemento neutro aditivo** $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + 0 = 0 + a = a **5. Elemento inverso** $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a + (–a) = (–a) + a = 0

Sustracción

Para restar dos números enteros se debe sumar al minuendo con el opuesto del sustraendo. Luego, se aplica las reglas de adición de números enteros.

Ejemplos:

- $(+16) - (+28) = (+16) + (-28) = -(28 - 16) = -12$
- $(+37) - (-15) = (+37) + (+15) = +(37 + 15) = +52$
- $(-52) - (-96) = (-52) + (+96) = +(96 - 52) = +44$
- $(-68) - (+24) = (-68) + (-24) = -(68 + 24) = -92$

Multiplicación y división

Para multiplicar o dividir números enteros, se deberá tener en cuenta:

1. Si dos números enteros tienen signos iguales, sus valores absolutos se multiplican (o dividen). Luego, al resultado se le antepone el signo positivo (+).
2. Si dos números enteros tienen signos diferentes, se multiplican (o dividen) sus valores absolutos. Luego, al resultado se le antepone el signo negativo (–).

Ejemplos:

- $(+6) \times (+8) = +(6 \times 8) = +48$
- $(+15) \times (-3) = -(15 \times 3) = -45$
- $(-5) \times (-7) = +(5 \times 7) = +35$
- $(+16) \div (+4) = +(16 \div 4) = +4$
- $(-27) \div (+9) = -(27 \div 9) = -3$
- $(-125) \div (-25) = -(125 \div 25) = +5$

Propiedades de la multiplicación

1. Clausura $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ b $\in \mathbb{Z}$ **2. Asociativa** $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ (b $\times$ c) = (a $\times$ b) $\times$ c **3. Conmutativa** $\forall$ a, b $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ b = b $\times$ a	**4. Elemento neutro multiplicativo** $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ 1 = 1 $\times$ a = a **5. Elemento inverso multiplicativo** $\forall$ a $\in \mathbb{Z}$; a $\neq$ 0: $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ **6. Distributiva** $\forall$ a, b, c $\in \mathbb{Z}$: a $\times$ (b $\pm$ c) = a $\times$ b $\pm$ a $\times$ c

Observación

Propiedad aditiva
$\forall$ a, b, x $\in \mathbb{Z}$:
si x = a $\Rightarrow$ x + b = a + b

Propiedad cancelativa
$\forall$ a, b, x $\in \mathbb{Z}$:
si x + b = a + b $\Rightarrow$ x = a



Nota

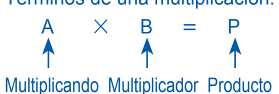
Términos de una sustracción:

A – B = D

Minuendo Sustraendo Diferencia

Nota

Términos de una multiplicación:



Recuerda

Regla de signos:
(+) × (+) = (+)
(+) × (–) = (–)
(–) × (–) = (+)
(–) × (+) = (–)

Observación

Propiedad multiplicativa
$\forall$a, b, x $\in \mathbb{Z}$: si x = a
$\Rightarrow$ x $\times$ b = a $\times$ b

Propiedad cancelativa
$\forall$a, b, x $\in \mathbb{Z}$: si a $\times$ x = a $\times$ b
$\Rightarrow$ x = b, a $\neq$ 0

Atención

El elemento neutro multiplicativo de un número entero diferente de cero no es un número entero, sino un número racional, los cuales serán estudiados posteriormente.

Ejemplo:

- Elemento neutro de –4: $(-4)^{-1} = \frac{1}{-4}$
- Elemento neutro de 16: $16^{-1} = \frac{1}{16}$



Potenciación

Es la operación en la que un número entero se multiplica por sí mismo varias veces.

Ejemplos:

- $-243 = \underbrace{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}_{\text{5 veces}} = (-3)^5$
- $+625 = \underbrace{(-5)\times(-5)\times(-5)\times(-5)}_{\text{4 veces}} = (-5)^4$
- $+8 = \underbrace{(+2)\times(+2)\times(+2)}_{\text{3 veces}} = (+2)^3$
- $+49 = \underbrace{(+7)\times(+7)}_{\text{2 veces}} = (+7)^2$

En general:

$$P = \underbrace{k\times k\times \ldots \times k}_{\text{n veces}} = k^n;\ k\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{N}$$

Radicación

Es la operación inversa a la potenciación que consiste en obtener un número entero llamado raíz, a partir de dos números llamados índice y radicando; es decir:

$$R = \sqrt[n]{k}\ ;\ k\in\mathbb{Z};\ n\in\mathbb{Z}^+ \wedge n > 1$$

Donde: k es el radicando, n es el índice y R la raíz enésima.

Ejemplos:

- $\sqrt[3]{(-8)} = -2$; ya que $(-2)^3 = -8$
- $\sqrt{(+9)} = +3$; ya que $(+3)^2 = +9$
- $\sqrt[5]{+32} = +2$; ya que $(+2)^5 = +32$
- $\sqrt[2]{+49} = +7$; ya que $(+7)^2 = +49$

OPERACIONES COMBINADAS

Cuando en los ejercicios aparecen las seis operaciones básicas, las efectuaremos en el orden siguiente:

1.° Calculamos las potencias y las raíces.
2.° Calculamos los productos y los cocientes.
3.° Resolvemos las sumas y diferencias (de izquierda a derecha).

Ejemplos:

- Resuelve: $\{[\sqrt[4]{81}\times(-2)^2 + 35\div\sqrt[3]{125}]\times(\sqrt{9}+\sqrt{4})\}\div(1^9 + 2\times 7 - \sqrt{100}) - (-2)^3$

Resolución:

$\{[\sqrt[4]{81}\times(-2)^2 + 35\div\sqrt[3]{125}]\times(\sqrt{9}+\sqrt{4})\}\div(1^9 + 2\times 7 - \sqrt{100}) - (-2)^3$
$= \{[3\times 4 + 35\div 5]\times(3+2)\}\div(1 + 14 - 10) - (-8)$
$= \{[12 + 7]\times 5\}\div(15 - 10) + 8$
$= \{19\times 5\}\div 5 + 8$
$= 95\div 5 + 8$
$= 19 + 8$
$= 27$

- Resuelve: $[(-2)^3 + 5\times 7 - 3] - 5\times 8 - (4 - 9\times 2) - \sqrt{10 - (16 - 5 + 2^3) + 9}$

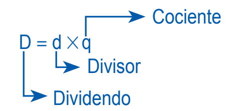
Resolución:

$[-8 + 5\times 7 - 3] - 5\times 8 - (4 - 9\times 2) - \sqrt{10 - (16 - 5 + 8) + 9}$
$= [-8 + 35 - 3] - 40 - (4 - 18) - \sqrt{10 - (16 - 5 + 8) + 9}$
$= 24 - 40 + 14 - \sqrt{10 - 19 + 9}$
$= -16 + 14 - 0$
$= -2$

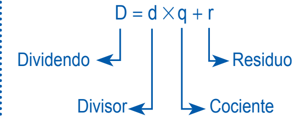
Nota

Términos de una división:

- División exacta:



- División inexacta:



Nota

Propiedades

- $(-A)^{par} = A^{par}$
- $(-A)^{impar} = -A^{impar}$
- $(A^m)^n = A^{mn}$
- $A^m\times A^n = A^{m+n}$
- $A^m\div A^n = A^{m-n}$

Recuerda

- $A^1 = A$
- $A^0 = 1,\ A\neq 0$
- 0^0 no está definido.

Atención

Si el índice es par y el radicando es negativo, entonces la raíz no está definida en el conjunto de los enteros.

Ejemplos:

- $\sqrt{-16}\notin\mathbb{Z}$
- $\sqrt{-25}\notin\mathbb{Z}$
- $\sqrt[4]{-81}\notin\mathbb{Z}$
- $\sqrt[4]{-256}\notin\mathbb{Z}$

Además:
Para todo número entero positivo se cumple:
$\sqrt{A}\geq 0$

Nota

Otras propiedades

- $A^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{A}} = \sqrt[mn]{A}$
- $(A\times B\times C)^n = A^n\times B^n\times C^n$
- $\sqrt[m]{A\times B\times C} = \sqrt[m]{A}\times\sqrt[m]{B}\times\sqrt[m]{C}$

Atención

Cuando aparecen signos de colección, se efectúa en el orden siguiente:
1.° ( )
2.° [ ]
3.° { }

Problemas resueltos

1 Resuelve:
$(-6)\times(-8)-\sqrt{17-(-2)^3}-(-2^3)-(-5)^2-(-4)^2$

Resolución:

Efectuamos primero las potencias y los radicales:
$=(-6)\times(-8)-\sqrt{17+8}+8-25-16$
$=(-6)\times(-8)-\sqrt{25}+8-25-16$
$=(-6)\times(-8)-5+8-25-16$

Luego, las multiplicaciones:
$=48-5+8-25-16$

Finalmente, las sumas y restas:
$=43+8-25-16$
$=51-25-16$
$=26-16$
$=10$

2 Si $m, n \in \mathbb{Z}-\{0\}$ y además: $(m+n)^2=4+m^2+n^2$
Halla el valor de: $H=[(11_{(4)})^m\times(11_{(5)})^m\times(11_{(6)})^m]^n$

Resolución:

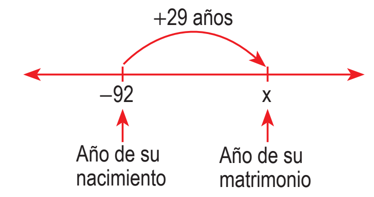
Del enunciado:
$(m+n)^2=4+m^2+n^2$
$m^2+2mn+n^2=4+m^2+n^2$
$2mn=4+m^2+n^2-m^2-n^2$
$2mn=4$
$\Rightarrow mn=2$

Luego; en H:
$H=[(11_{(4)})^m\times(11_{(5)})^m\times(11_{(6)})^m]^n$
$H=[(4+1)^m\times(5+1)^m\times(6+1)^m]^n$
$H=[5^m\times6^m\times7^m]^n$
$H=5^{mn}\times6^{mn}\times7^{mn}$
$H=5^2\times6^2\times7^2=25\times36\times49=44\,100$

3 Rubén nació en el año 92 a. C. y se casó a los 29 años. ¿En qué año se casó?

Resolución:

Recuerda que los años antes de Cristo (a. C.) se consideran como negativos y los años después de Cristo (d. C.) se consideran como positivos.
Gráficamente, tenemos:



Luego:
$-92+29=x$
$-63=x$

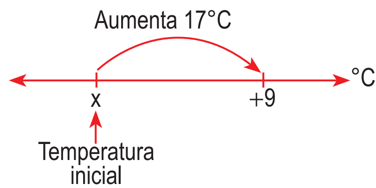
Por lo tanto, Rubén se casó en el año 63 a. C.

4 Si un termómetro marca 9°C después de que la temperatura subió 17°C, ¿cuál era la temperatura inicial?

Resolución:

Por dato:
- La temperatura final es: +9°C.
- La temperatura aumenta: 17°C.

Por lo tanto, la temperatura inicial será la diferencia de ambas temperaturas.
Gráficamente:



Es decir:
$x+(+17)=+9$
$x=+9-(+17)$
$x=-8°C$
Por lo tanto, la temperatura inicial fue de –8°C.

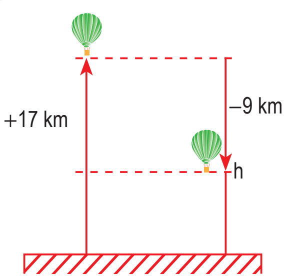
5 Un globo aerostático asciende 17 kilómetros y desciende 9 kilómetros. ¿A cuántos kilómetros se encuentra del punto de despegue?

Resolución:

En el problema se presentan dos situaciones:
- Cuando el globo asciende (+).
- Cuando el globo desciende (–).

Por dato:
- El globo asciende: +17 km.
- El globo desciende: –9 km.

Gráficamente:



Para determinar la distancia al punto de despegue, debemos sumar ambos desplazamientos:
$h=(+17)+(-9)$
$h=8$ km
Por lo tanto, el globo aerostático se encuentra a 8 km del punto de despegue.

6 Si $m, n \in \mathbb{Z}$ y además:
$2n+(-7)^2+(-5)\times8=n-m-\sqrt{144}-(-7)\times3$

Halla:
$$\left(4^{5^{6^{7}}}+8^{9^{10^{11}}}+12^{13^{14^{15}}}\right)^m\times\left(4^{5^{6^{7}}}+8^{9^{10^{11}}}+12^{13^{14^{15}}}\right)^n$$

Resolución:

Resolvemos la expresión:

$$2n + (-7)^2 + (-5)\times 8 = n - m - \sqrt{144} - (-7)\times 3$$
$$2n + 49 + (-40) = n - m - 12 - (-21)$$
$$2n + 49 - 40 = n - m - 12 + 21$$
$$2n + 9 = n - m + 9$$
$$2n - n = -m + 9 - 9$$
$$n = -m$$
$$\Rightarrow n + m = 0$$

Como m y n son números enteros entonces, observamos que n es el inverso aditivo de m o viceversa.

Luego:

$$A = \left(4^{5^{6^{7}}} + 8^{9^{10^{11}}} + 12^{13^{14^{15}}}\right)$$

Entonces:

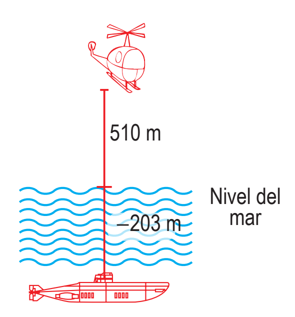
$A^m \times A^n = A^{m+n}$

Como: $m + n = 0 \Rightarrow A^{m+n} = 1$

7 Un helicóptero que vuela a 510 metros sobre el mar, observa por debajo de él a un submarino que se encuentra a una profundidad de 203 metros. ¿A qué distancia se encuentra el submarino del avión?

Resolución:

Gráficamente:



En este tipo de problema se debe considerar:

- Sobre el nivel del mar: +
- Bajo el nivel del mar: –

Para calcular la distancia entre el submarino y el avión sumamos los valores absolutos de estos valores:

$|510| = 510$

$|-203| = -(-203) = 203$

Luego: $510 + 203 = 713$ metros

8 De un depósito que contiene 800 litros de agua, se retiran 240 litros y luego se agregan 250 litros. Después se retiran 180 litros y se agregan x litros. ¿Cuál es el valor de x si al final el depósito contiene 500 litros?

Resolución:

Del enunciado, al inicio el depósito contiene 800 litros.

Luego:

- Se retiran 240 litros: –240
- Se agregan 250 litros: +250
- Se retiran 180 litros: –180
- Se agregan x litros: +x

Para hallar el contenido final del depósito, debemos sumar las cantidades.

Contenido final $= -240 + 250 - 180 + x$

Además, por dato, al final el depósito contiene 500 litros, entonces:

$$-240 + 250 - 180 + x = 500$$
$$10 - 180 + x = 500$$
$$-170 + x = 500$$
$$x = 500 + 170$$
$$x = 670 \text{ litros}$$

9 Si: $M = \sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7...}}}$

$N = \sqrt{M + 5N + \sqrt{M + 5N + \sqrt{M + 5N + ...}}}$

Halla:

$(M^3 + 7 + 9^6)^{M-N} - [(-M)\times(-N) + 1] \div [7 - (-\sqrt[4]{81})] - (-3 - N)$

Resolución:

Del enunciado:

- $M = \underbrace{\sqrt{7\sqrt{7\sqrt{7...}}}}_{M} \quad \Rightarrow \quad M = \sqrt{7M}$; $M^2 = 7M$; $M = 7 \quad (M \neq 0)$
- $N = \sqrt{M + 5N + \underbrace{\sqrt{M + 5N + \sqrt{M + 5N + ...}}}_{N}}$

$$N = \sqrt{M + 5N + N}$$
$$N = \sqrt{M + 6N}$$
$$N^2 = M + 6N$$
$$\Rightarrow N^2 - 6N = M$$
$$N^2 - 6N = 7$$
$$N(N - 6) = 7 \times 1 \quad (N > 0)$$
$$\Rightarrow N = 7$$

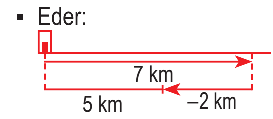
Reemplazamos:

$$(7^3 + 7 + 9^6)^{7-7} - [(-7)\times(-7) + 1] \div [7 - (-\sqrt[4]{81})] - (-3 - 7)$$
$$= (7^3 + 7 + 9^6)^0 - [49 + 1] \div [7 - (-3)] - (-10)$$
$$= 1 - 50 \div 10 + 10$$
$$= 1 - 5 + 10 = 6$$

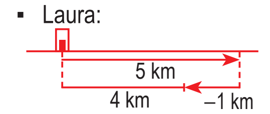
10 Eder y Laura parten de un mismo lugar en bicicleta. Si Eder avanza 7 kilómetros y luego retrocede 2 kilómetros; y Laura avanza 5 kilómetros y retrocede 1, ¿a qué distancia se encuentra uno del otro?

Resolución:

- Eder:

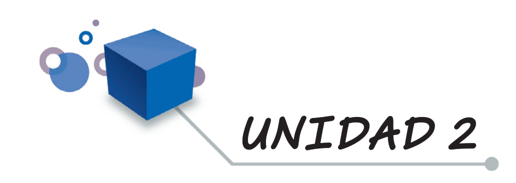


- Laura:



Por lo tanto, la distancia que separa a Eder de Laura es:

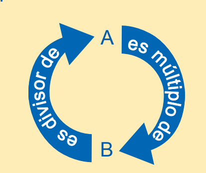
5 km – 4 km = 1 km



UNIDAD 2



DIVISIBILIDAD

> **Observación**
>
> Si A es divisible por B, también se puede decir:
>
> 
>



DEFINICIÓN

La divisibilidad es la parte de la aritmética que estudia las condiciones que debe reunir un número entero para que sea divisible entre otro número entero positivo.

Se dice que A es divisible por B, donde $A \in \mathbb{Z}$ y $B \in \mathbb{Z}^+$, si al dividir A entre B el cociente es entero y el residuo cero.

$$\boxed{\text{A es divisible por B} \Longleftrightarrow \begin{array}{r|l} A & B \\ \hline 0 & q \end{array}}\text{; donde: } q \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- $\begin{array}{r|l} 42 & 6 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \Rightarrow$ 42 es divisible por 6.
- $\begin{array}{r|l} 91 & 13 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \Rightarrow$ 91 es divisible por 13.

Multiplicidad

Se dice que A es múltiplo de B, con $A \in \mathbb{Z}$ y $B \in \mathbb{Z}^+$, si A es el resultado de multiplicar B por un entero.

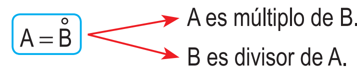
$$\boxed{\text{A es múltiplo de B} \Longleftrightarrow A = B \times k} \text{ donde: } k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

- $40 = 5 \times \underset{\in \mathbb{Z}}{\underset{\downarrow}{8}} \Rightarrow$ 40 es múltiplo de 5.
- $12 = 3 \times \underset{\in \mathbb{Z}}{\underset{\downarrow}{4}} \Rightarrow$ 12 es múltiplo de 3.

Notación:

Para denotar que A es múltiplo de B; escribiremos:



$\boxed{A = \overset{\circ}{B}}$ → A es múltiplo de B.
→ B es divisor de A.

Ejemplo:

¿Cuáles son los múltiplos de 7?

$$\overset{\circ}{7} : ...; -21; -14; -7; 0; 7; 14; 21; ...$$

> **Atención**
>
> - $\begin{array}{r|l} 86 & 6 \\ \hline 2 & 14 \end{array} \Rightarrow 86 = 6 \times 14 + 2$ Luego, 86 no es divisible por 6.
> - $86 = 5 \times k; k \notin \mathbb{Z}$ Luego, 86 no es múltiplo de 5.

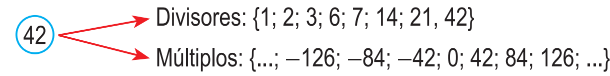


PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD

1. La adición o sustracción de múltiplos de un mismo número siempre es igual a un múltiplo del mismo número.
   Así tenemos:
   $$\boxed{\overset{\circ}{n} + \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}} \wedge \boxed{\overset{\circ}{n} - \overset{\circ}{n} = \overset{\circ}{n}}$$
2. La multiplicación de un múltiplo de n por un entero, da como producto un múltiplo de n.
   Así tenemos:
   $$\boxed{\overset{\circ}{n} . k = \overset{\circ}{n}}; k \in \mathbb{Z}$$
3. Si un múltiplo de n, se eleva a un exponente entero y positivo, el resultado será un múltiplo de n.
   Así tenemos:
   $$\boxed{(\overset{\circ}{n})^k = \overset{\circ}{n}}; k \in \mathbb{Z}^+$$

Observaciones:

a) Todo número entero posee divisores y múltiplos. Por ejemplo:



42 → Divisores: {1; 2; 3; 6; 7; 14; 21, 42}
→ Múltiplos: {...; –126; –84; –42; 0; 42; 84; 126; ...}

b) Si A no es divisible entre B, se cumple:

División inexacta por defecto	División inexacta por exceso
$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \hline r_d & q \end{array}$ $A = B.q + r_d$ $\Rightarrow A = \overset{\circ}{B} + r_d$	$\begin{array}{r\|l} A & B \\ \hline r_e & q+1 \end{array}$ $A = B(q + 1) - r_e$ $\Rightarrow A = \overset{\circ}{B} - r_e$

Donde:
$r_d + r_e = B$

> **Observación**
>
> - $\underbrace{6}_{\overset{\circ}{2}} + \underbrace{8}_{\overset{\circ}{2}} = \underbrace{14}_{\overset{\circ}{2}}$
> - $\underbrace{15}_{\overset{\circ}{5}} - \underbrace{5}_{\overset{\circ}{5}} = \underbrace{10}_{\overset{\circ}{5}}$
> - $\underbrace{7}_{\overset{\circ}{7}} \times 3 = \underbrace{21}_{\overset{\circ}{7}}$
> - $3^4 = \underbrace{81}_{\overset{\circ}{3}}$, $(\overset{\circ}{3})^4 = \overset{\circ}{3}$



Ejemplo:

- $50 \underline{|6} \Rightarrow 50 = \overset{\circ}{6} + 2$
  $\;\;2\;\;8$
- $50 \underline{|6} \Rightarrow 50 = \overset{\circ}{6} - 4$
  $\;\;4\;\;9$

c) Si el producto de dos números es múltiplo de n y uno de ellos no admite divisores comunes, aparte de la unidad, con n, entonces el otro es múltiplo de n.

Ejemplos:

- $5 \times A = \overset{\circ}{7} \Rightarrow A = \overset{\circ}{7}$
- $2 \times N = \overset{\circ}{9} \Rightarrow N = \overset{\circ}{9}$

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Divisibilidad por potencias de 2	**Divisibilidad por potencias de 5**
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{2} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{2}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{4} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{4}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$	$\overline{abcde} = \overset{\circ}{5} \Leftrightarrow e = \overset{\circ}{5}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{25} \Leftrightarrow \overline{de} = \overset{\circ}{25}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{125} \Leftrightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{125}$
Divisibilidad por 3 ó 9	**Divisibilidad por 7**
$\overline{abcde} = \overset{\circ}{3} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{3}$ $\overline{abcde} = \overset{\circ}{9} \Leftrightarrow a + b + c + d + e = \overset{\circ}{9}$	$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{7} \Leftrightarrow 2d + 3e + f - 2a - 3b - c = \overset{\circ}{7}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 2 3 1 2 3 1 − +
Divisibilidad por 11	**Divisibilidad por 13**
$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{11} \Leftrightarrow -a + b - c + d - e + f = \overset{\circ}{11}$ − + − + − +	$\overline{a\,b\,c\,d\,e\,f} = \overset{\circ}{13} \Leftrightarrow 4a + 3b - c - 4d - 3e + f = \overset{\circ}{13}$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 4 3 1 4 3 1 + − +

Observación:

Hallaremos otra forma de expresar el criterio de divisibilidad por 8. Sabemos que: $\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow \overline{cde} = \overset{\circ}{8}$

Es decir para saber si un número es múltiplo de 8, o dicho de otra forma, si un número es divisible por 8; solo nos interesan las tres últimas cifras: $\overline{cde} = \overset{\circ}{8}$

Descomponiendo polinómicamente:

$$100c + 10d + e = \overset{\circ}{8}$$
$$(96 + 4)c + (8 + 2)d + e = \overset{\circ}{8}$$
$$(\overset{\circ}{8} + 4)c + (\overset{\circ}{8} + 2)d + e = \overset{\circ}{8}$$
$$\overset{\circ}{8} + 4c + 2d + e = \overset{\circ}{8}$$
$$4c + 2d + e = \overset{\circ}{8}$$

Es decir para que el numeral $\overline{abcde}$ sea $\overset{\circ}{8}$, el criterio es: $\overline{abcde} = \overset{\circ}{8} \Longleftrightarrow 4c + 2d + e = \overset{\circ}{8}$

421
+++

Divisibilidad por un número compuesto

Cuando se quiere saber si un número entero es divisible por otro número entero positivo que tiene más de 2 divisores, se debe utilizar los criterios de divisibilidad de los divisores.

Ejemplo:

De los números: 63 456, 24 363 y 47 362, ¿cuáles son divisibles por 6?

Resolución:

Como 6 es divisible por 2 y 3, entonces usando sus criterios, para que un número sea divisible por 6, debe ser divisible por 3 y por 2 a la vez.

63 456 $\begin{cases} \text{Termina en cifra par} \Rightarrow \overset{\circ}{2} \\ \text{Suma de cifras} = \overset{\circ}{3} \Rightarrow \overset{\circ}{3} \end{cases}$

24 363 $\begin{cases} \text{Termina en cifra impar} \Rightarrow \text{no es } \overset{\circ}{2} \\ \text{Suma de cifras} = \overset{\circ}{3} \Rightarrow \overset{\circ}{3} \end{cases}$

47 362 $\begin{cases} \text{Termina en cifra par} \Rightarrow \overset{\circ}{2} \\ \text{Suma de cifras} \neq \overset{\circ}{3} \Rightarrow \text{no es } \overset{\circ}{3} \end{cases}$

∴ Solo 63 456 es $\overset{\circ}{6}$.

Recuerda

- El cero (0) es múltiplo de todos los números.
- El uno (1) es divisor de todos los números.



Nota

- $(\overset{\circ}{7} + 2)(\overset{\circ}{7} + 3) = \overset{\circ}{7} + 2 \,.\, 3$
  En general:
  $(\overset{\circ}{n} + r_1)(\overset{\circ}{n} + r_2) = \overset{\circ}{n} + r_1 \,.\, r_2$
- $(\overset{\circ}{5} + 2)^3 = (\overset{\circ}{5} + 2)(\overset{\circ}{5} + 2)(\overset{\circ}{5} + 2)$
  $= (\overset{\circ}{5} + 4)(\overset{\circ}{5} + 2) = \overset{\circ}{5} + 8$
  $= \overset{\circ}{5} + 2^3$
  En general:
  $(\overset{\circ}{n} + r)^k = \overset{\circ}{n} + r^k$

Atención

Ejemplo:
Por casualidad Carlos borró las 3 últimas cifras del número telefónico de Rocío, solo recuerda de estas tres cifras que:

- La 1.ª y la 3.ª cifra eran iguales.
- El numeral era $\overset{\circ}{5}$ y $\overset{\circ}{9}$.

Ayudemos a Carlos:

$\overline{aba}$ → $\overset{\circ}{5}$, $\overset{\circ}{9}$

Como: $\overline{aba} = \overset{\circ}{5}$

$\Rightarrow a = 5$

Además:

$\overline{5b5} = \overset{\circ}{9}$

$5 + b + 5 = \overset{\circ}{9}$

$1 + b = \overset{\circ}{9} \Rightarrow b = 8$

Luego, las tres últimas cifras eran: 585



Problemas resueltos

1 Calcula el mayor valor de x para que $\overline{2x3}$ sea divisible por 3.

Resolución:

$\overline{2x3} = \overset{\circ}{3}$

Aplicando el criterio de divisibilidad por 3:

$2 + x + 3 = \overset{\circ}{3}$

$5 + x = \overset{\circ}{3}$

↳ 1; 4; 7

Tomando en cuenta que x solo debe ser una sola cifra, su máximo valor sería 7.

2 Calcula el residuo de dividir 37^6 entre 7.

Resolución:

$37^6 = (35 + 2)^6 = (\overset{\circ}{7} + 2)^6$

$37^6 = \overset{\circ}{7} + 2^6 = \overset{\circ}{7} + 64 = \overset{\circ}{7} + 63 + 1$

$37^6 = \overset{\circ}{7} + 1$

∴ El residuo es 1.

3 Efectúa:

$(\overset{\circ}{6} + 1)(\overset{\circ}{6} + 2)(\overset{\circ}{6} + 3)(\overset{\circ}{6} + 4)(\overset{\circ}{6} + 5)$

Resolución:

$(\overset{\circ}{6} + 1)(\overset{\circ}{6} + 2)(\overset{\circ}{6} + 3)(\overset{\circ}{6} + 4)(\overset{\circ}{6} + 5)$

$(\overset{\circ}{6} + 2) \times (\overset{\circ}{6} + 12) \times (\overset{\circ}{6} + 5)$

$(\overset{\circ}{6} + 24)(\overset{\circ}{6} + 5)$

$\overset{\circ}{6} + 120 = \overset{\circ}{6}$

$\overset{\circ}{6}$

4 ¿Cuántos números de dos cifras son múltiplos de 7?

Resolución:

Sea: $n = \overline{ab} = \overset{\circ}{7} \Rightarrow 3a + b = \overset{\circ}{7}$

31
+

a	b
1	4
2	1
3	5
4	2
5	6
6	3
7	0
8	4
9	1

} 9 números

∴ Existen 9 números de 2 cifras múltiplos de 7.

5 Sean x e y dos números naturales de una cifra.
Calcula x + y, si: $5(x - 3) = \overset{\circ}{7}$

$3(2y + 1) = \overset{\circ}{11}$

Resolución:

- $5(x - 3) = \overset{\circ}{7}$

  $x - 3 = \overset{\circ}{7} \Rightarrow x = 3$

- $3(2y + 1) = \overset{\circ}{11}$

  $2y + 1 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow y = 5$

∴ $x + y = 3 + 5 = 8$

6 Calcula m, si $\overline{4m85} = \overset{\circ}{11}$.

Resolución:

$\overline{4\,m\,8\,5} = \overset{\circ}{11} \Rightarrow m + 5 - 4 - 8 = \overset{\circ}{11}$

$-+-+$

$m - 7 = \overset{\circ}{11}$

$\Rightarrow m = 7$

7 Calcula a, si $\overline{25a88} = \overset{\circ}{13}$.

Resolución:

$\overline{2\,5\,a\,8\,8} = \overset{\circ}{13}$

3 1 4 3 1

+ − +

$6 - 5 - 4a - 24 + 8 = \overset{\circ}{13}$

$-4a - 15 = \overset{\circ}{13}$

$4a + 15 = \overset{\circ}{13}$

$4a + 2 = \overset{\circ}{13}$

$2a + 1 = \overset{\circ}{13}$

$\Rightarrow a = 6$

8 Halla x:

$\overline{(2x)9x39} = \overset{\circ}{7}$

Resolución:

$\overline{(2x)\,9\,x\,3\,9} = \overset{\circ}{7}$

3 1 2 3 1

− +

$-6x - 9 + 2x + 9 + 9 = \overset{\circ}{7}$

$9 - 4x = \overset{\circ}{7}$

$4x - 9 = \overset{\circ}{7}$

$4x - 2 = \overset{\circ}{7}$

$\Rightarrow 2x - 1 = \overset{\circ}{7}$

4

Luego, el valor de x es 4.

9 Si $\overline{4ab32} = \overset{\circ}{13} + 8$.
Halla la suma de todos los valores de b.

Resolución:

Realizamos la descomposición polinómica:

$40\,000 + 100(\overline{ab}) + 32 = \overset{\circ}{13} + 8$

$\overset{\circ}{13} - 1 + (\overset{\circ}{13} + 9)(\overline{ab}) + \overset{\circ}{13} + 6 = \overset{\circ}{13} + 8$

$\overset{\circ}{13} - 1 + \overset{\circ}{13} + 9(\overline{ab}) + \overset{\circ}{13} + 6 = \overset{\circ}{13} + 8$

$9(\overline{ab}) = \overset{\circ}{13} + 3$

$9(\overline{ab}) - 3 - 78 = \overset{\circ}{13}$

$9(\overline{ab} - 9) = \overset{\circ}{13}$

$\overline{ab} - 9 = \overset{\circ}{13}$

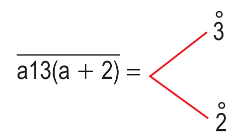
$$\overline{ab} = \overset{\circ}{13} + 9$$

$\Rightarrow \overline{ab}$: 22; 35; 48; 61; 74; 87

La suma de los valores que puede tomar b es:
$2 + 5 + 8 + 1 + 4 + 7 = 27$

10 Calcula la suma de las cifras de $\overline{3a2}$, si:
$\overline{a13(a+2)} = \overset{\circ}{6}$

Resolución:



$\overline{a13(a+2)} = \overset{\circ}{3}$; $\overset{\circ}{2}$

- Divisibilidad por 3:
  $a + 1 + 3 + a + 2 = \overset{\circ}{3}$
  $2a + 6 = \overset{\circ}{3}$
  $2a = \overset{\circ}{3} \Rightarrow a = \overset{\circ}{3}$
- Divisibilidad por 2:
  $a + 2 = \overset{\circ}{2}$
  $a = \overset{\circ}{2}$
  $\Rightarrow a = \overset{\circ}{6}$

Luego: $a = 6$.
Nos piden: $3 + a + 2 = 3 + 6 + 2 = 11$.

11 El número de páginas de un libro está comprendido entre 220 y 250. Si se cuenta sus páginas de 3 en 3 sobran 2; de 4 en 4 sobran 3 y de 5 en 5 sobran 4. Halla el número de páginas del libro.

Resolución:
Sea $\overline{abc}$ el numero de páginas de dicho libro.
Del enunciado:
$220 < \overline{abc} < 250 \Rightarrow a = 2 \wedge b \in \{2; 3; 4\}$

Además:

$$\overline{2bc} = \begin{cases} \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1 \\ \overset{\circ}{4} + 3 = \overset{\circ}{4} - 1 \\ \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1 \end{cases} \Rightarrow \overline{2bc} + 1 = \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{5} \end{cases}$$

Es decir, se debe cumplir:
- $2 + b + c + 1 = \overset{\circ}{3} \Rightarrow b + c = \overset{\circ}{3}$
- $\overline{bc} + 1 = \overset{\circ}{4}$
- $c + 1 = \begin{cases} 5 \\ 0 \end{cases} \Rightarrow c = \begin{cases} 4 \\ 9 \end{cases}$

Si $c = 4$: $\overline{b5} \neq \overset{\circ}{4}$
Si $c = 9$: $...0 = \overset{\circ}{4}$
Como: $b + c = \overset{\circ}{3}$
$b + 9 = \overset{\circ}{3}$
$b = 3$
$\therefore \overline{abc} = 239$

12 A una fiesta asisten entre 350 y 400 personas, se observa que 1/3 utiliza corbata, 1/4 usan casaca, y 1/11 utilizan reloj. ¿Cuántos asistieron a la fiesta?

Resolución:
Sea $\overline{abc}$ el número de personas, entonces:
$350 < \overline{abc} < 400 \Rightarrow a = 3 \wedge b > 5$
Del enunciado:
n°. de personas que usan corbata: $\dfrac{\overline{abc}}{3} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{3}$
n°. de personas que usan casaca: $\dfrac{\overline{abc}}{4} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{4}$
n°. de personas que usan reloj: $\dfrac{\overline{abc}}{11} \Rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{11}$
Luego:
- $3 + b + c = \overset{\circ}{3} \Rightarrow b + c = \overset{\circ}{3}$
- $c - b + 3 = \overset{\circ}{11} \Rightarrow c - b = \overset{\circ}{11} - 3$
- $\overline{bc} = \overset{\circ}{4}$

De los datos podemos calcular los valores de b y c, ya que serán máximo de una cifra.
Si: $c - b = 8 \Rightarrow (c = 8 \wedge b = 0) \vee (c = 9 \wedge b = 1)$
Como ni $(8 + 0)$ ni $(9 + 1)$ son $\overset{\circ}{3}$, estos valores se descartan
Si: $c - b = -3$; $b > 5$ y $c = \overset{\circ}{2}$
$\Rightarrow (c = 6 \wedge b = 9) \vee (c = 4 \wedge b = 7)$,
Como $b + c = \overset{\circ}{3}$, entonces: $\overline{abc} = 396$

13 Si: $\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + ... + \overline{10a} = \overset{\circ}{8}$
Halla la suma de los posibles valores de a.

Resolución:

$$\overline{1a} + \overline{2a} + \overline{3a} + ... + \overline{10a} = \overset{\circ}{8}$$
$$10 + a + 20 + a + 30 + a + ... + 100 + a = \overset{\circ}{8}$$
$$(10 + 20 + ... + 100) + 10a = \overset{\circ}{8}$$
$$10(1 + 2 + ... + 10) + 10a = \overset{\circ}{8}$$
$$10\left(\frac{10 \times 11}{2} + a\right) = \overset{\circ}{8}$$
$$5(55 + a) = \overset{\circ}{4}$$
$$55 + a = \overset{\circ}{4}$$
$$3 + a = \overset{\circ}{4}$$

$\downarrow$
1
5
9

Nos piden: $1 + 5 + 9 = 15$

14 ¿De qué número será siempre múltiplo, la suma de 5 números naturales consecutivas?

Resolución:
Sea x un número natural, entonces:
$S = x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4$
$S = 5x + 10$
$S = 5(x + 2)$
$S = \overset{\circ}{5}$; $x + 2 \in \mathbb{Z}$

NÚMEROS PRIMOS



Atención

- El conjunto de los números primos es infinito.
- El número 2 es el único número par que es primo.
- El número 1 es el único que no se considera primo ni compuesto.



Observación

Forma práctica de identificar un número primo
Si un número no es divisible por los números primos menores o iguales a la parte entera de la raíz cuadrada del número, entonces dicho número es primo.

Veamos un ejemplo:

¿Será 57 un número primo?

$\sqrt{57} = 7{,}549...$

Se deberá probar la divisibilidad de 57 entre 2; 3; 5; 7

Observamos que 57 es divisible por 3.

Por lo tanto, 57 no es primo.



Nota

Para determinar la descomposición canónica de un número aplicaremos el siguiente procedimiento:

420	2
210	2
105	3
35	5
7	7
1	

Luego:
$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Los números enteros positivos de acuerdo a su cantidad de divisores se clasifican en:

Números simples

a) La unidad: es el único entero positivo que posee un solo divisor.
b) Número primo absoluto: Es aquel número que admite únicamente dos divisores (él mismo y la unidad).

Algunos ejemplos:

- El número 7 solo es divisible por 1 y por 7. Entonces 7 es primo.
- El número 13 solo es divisible por 1 y por 13. Entonces 13 es primo.

Números compuestos

Son aquellos números que poseen más de dos divisores.
Algunos ejemplos:

- El número 6 es divisible por 1; 2; 3 y 6. Entonces 6 es compuesto.
- El número 15 es divisible por 1; 3; 5 y 15. Entonces 15 es compuesto.

Observación:
Dado un número entero positivo N se cumple: $CD(N) = CD_P + CD_C + 1$

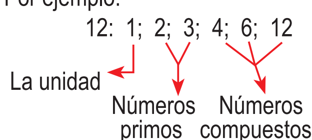
Donde:

CD(N): cantidad de divisores de N.

CD_P: cantidad de divisores primos de N.

CD_C: cantidad de divisores compuestos de N.

Por ejemplo:



$CD(12) = 2 + 3 + 1 \Rightarrow CD(12) = 6$

CD_P CD_C

NÚMEROS PRIMOS RELATIVOS O PRIMOS ENTRE SÍ (PESÍ)

Dos números son primos entre sí cuando su único divisor común es la unidad. Por ejemplo:

8: (1); 2; 4; 8
15: (1); 3; 5; 15 $\Rightarrow$ 8 y 15 son PESÍ

Divisores

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Todo número entero positivo mayor que la unidad se puede expresar, de manera única, como el producto de sus factores primos elevados a ciertos exponentes.

$$N = a^{\alpha} . b^{\beta} . c^{\theta}$$ ← se denomina “descomposición canónica”.

a, b, c: divisores primos de N.
α, β, θ: números enteros positivos.

Observa los ejemplos:

- $12 = 2^2 \times 3$
- $42 = 2 \times 3 \times 7$
- $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$

Tabla de los divisores de un número

Para construir la tabla de los divisores de un número, se siguen los siguientes pasos:

i) Se realiza la descomposición canónica del número.
ii) Los divisores que contienen al menor número primo se ubican en la fila principal y los demás divisores (de menor a mayor) en la columna principal.
iii) Se van multiplicando los de la columna principal con todos los divisores de la fila principal.



Observa los ejemplos:

1. Escribe la tabla de los divisores de 36.
   $36 = 2^2 \times 3^2$

Divisores de 2^2

Fila principal

Columna principal

$\times$	2^0	2^1	2^2
1	1	2	4
3^1	3	6	12
3^2	9	18	36

2. Escribe la tabla de los divisores de 840.
   $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$

$\times$		2^0	2^1	2^2	2^3
	1	1	2	4	8
	3	3	6	12	24
5		5	10	20	40
		15	30	60	120
7		7	14	28	56
		21	42	84	168
		35	70	140	280
		105	210	420	840

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

Dado un número N cuya descomposición canónica es $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\theta$, es posible determinar directamente la cantidad de divisores de N, la suma de divisores de N, el producto de divisores de N, etc.

Cantidad de divisores de un número (CD)

Sea $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\theta$, entonces: $CD(N) = (\alpha + 1)(\beta + 1)(\theta + 1)$

Veamos algunos ejemplos:

- $36 = 2^2 \times 3^2$
  $CD(36) = (2 + 1)(2 + 1)$
  $CD(36) = 3 \times 3$
  $CD(36) = 9$
- $840 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$
  $CD(840) = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1)$
  $CD(840) = 4 \times 2 \times 2 \times 2$
  $CD(840) = 32$

Suma de divisores de un número (SD)

Sea $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\theta$, entonces:

$$SD(N) = \left(\frac{a^{\alpha+1} - 1}{a - 1}\right)\left(\frac{b^{\beta+1} - 1}{b - 1}\right)\left(\frac{c^{\theta+1} - 1}{c - 1}\right)$$

Por ejemplo:

- $15 = 3^1 \times 5^1$
  $SD_{(15)} = \left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right)$
  $SD_{(15)} = \left(\frac{8}{2}\right)\left(\frac{24}{4}\right) = 24$
- $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$
  $SD(60) = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right)\left(\frac{3^2 - 1}{3 - 1}\right)\left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right)$
  $SD(60) = 7 \times 4 \times 6 = 168$

Producto de divisores de un número (PD)

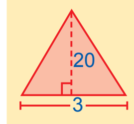
Sea $N = a^\alpha \times b^\beta \times c^\theta$, entonces: $PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$

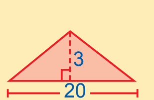
Veamos algunos ejemplos:

- $15 = 3^1 \times 5^1 \Rightarrow CD(15) = 4$
  $PD(15) = \sqrt{15^4} = 15^2$
  $PD(15) = 225$
- $12 = 2^2 \times 3 \Rightarrow CD(12) = 6$
  $PD(12) = \sqrt{12^6} = 12^3$
  $PD(12) = 1728$

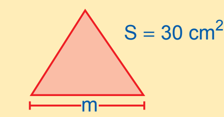
Atención

Luis desea averiguar cuántos triángulos, cuyas medidas de su base y altura sean enteras, existen tal que tengan área igual a 30 cm^2.





De los dos triángulos anteriores tenemos:



m es necesariamente divisor de 60, pues:
$\frac{m.h}{2} = 30 \Rightarrow m.h = 60$
Luego, solo es necesario calcular CD(60).
Como $60 = 2^2 \times 3 \times 5$
$\Rightarrow CD(60) = 12$
Por lo tanto, existen 12 triángulos que cumplen dicha condición.



Nota

El número 1 no está incluido en el conjunto de los números primos porque solamente es divisible por sí mismo.



Problemas resueltos

1 Dado el número 540, calcula:

a) Cantidad de divisores primos.
b) Cantidad total de divisores.
c) Cantidad de divisores compuestos.
d) La suma de divisores.
e) El producto de sus divisores.
f) Su tabla de divisores.

Resolución:

a) Hallamos la descomposición canónica de 540:

540	2
270	2
135	3
45	3
15	3
5	5
1	

$\Rightarrow 540 = 2^2 \times 3^3 \times 5^1$

(2, 3, 5: divisores primos)

$\Rightarrow CD_p = 3$

b) $CD(540) = (2+1)(3+1)(1+1)$
$CD(540) = 3 \times 4 \times 2 = 24$

c) $CD(540) = CD_P + CD_C + 1$
$24 = 3 + CD_C + 1$
$\Rightarrow CD_C = 20$

d) $SD(540) = \left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{3+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)$

$SD(540) = \left(\frac{7}{1}\right)\left(\frac{80}{2}\right)\left(\frac{24}{4}\right) = 7 \times 40 \times 6$

$SD(540) = 1680$

e) $PD(540) = \sqrt{540^{CD(540)}} = \sqrt{540^{24}}$
$PD(540) = 540^{12}$

f) La tabla de divisores de 540 es:

×	2^0	2^1	2^2
1	1	2	4
3	3	6	12
3^2	9	18	36
3^3	27	54	108
5	5	10	20
	15	30	60
	45	90	180
	135	270	540

Se multiplica los valores de la columna principal por la fila principal (1, 3, 3^2, 3^3)

Se multiplica este valor por las filas de la tabla (5)

2 Determina la cantidad de divisores de:
$C = 6^2 \times 21^4 \times 35^3$

Resolución:

$C = (2 \times 3)^2(3 \times 7)^4(5 \times 7)^3$
$C = 2^2 \times 3^2 \times 3^4 \times 7^4 \times 5^3 \times 7^3$
$C = 2^2 \times 3^6 \times 5^3 \times 7^7$
Luego:
$CD(C) = (2+1)(6+1)(3+1)(7+1)$
$CD(C) = 3 \times 7 \times 4 \times 8$
$\therefore CD(C) = 672$

3 Si la cantidad de divisores de $3^6 \times 5^{2x}$ es 35, calcula x.

Resolución:

$CD(N) = 35$
$\Rightarrow (6+1)(2x+1) = 35$
$7(2x+1) = 35$
$2x + 1 = 5$
$2x = 4 \Rightarrow x = 2$

4 ¿Cuántos ceros debe tener el número 300... para que tenga 50 divisores?

Resolución:

$\underbrace{300...}_{n\ ceros} = 3 \times 10^n = 3 \times (2 \times 5)^n = 3 \times 2^n \times 5^n$
$CD(3 \times 2^n \times 5^n) = 50$
$(1+1)(n+1)(n+1) = 50$
$2(n+1)^2 = 50$
$(n+1)^2 = 25 \Rightarrow n = 4$
$\therefore$ El número debe tener 4 ceros.

5 ¿Cuántos divisores que no son múltiplos de 5 tiene 1980?

Resolución:

1980	2
990	2
495	3
165	3
55	5
11	11
1	

$\Rightarrow 1980 = 2^2 \times 3^2 \times 5^1 \times 11^1$
$CD(1980) = (2+1)(2+1)(1+1)(1+1)$
$CD(1980) = 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

Primero hallamos los divisores múltiplos de 5; para ello separamos un factor 5 y calculamos la cantidad de divisores que queda:
$1980 = 5(\underbrace{2^2 \times 3^2 \times 11^1}_{})$
$CD_{\overset{o}{5}} = (2+1)(2+1)(1+1) = 18$
Entonces, la cantidad de divisores que no son múltiplos de 5 es:
$36 - 18 = 18$

6 La forma canónica de un número es $a^a \times b^b$ y tiene 24 divisores y $a^{a-1} \times b^b$ tiene 16 divisores, halla $a \times b$.

Resolución:

Por dato: $a(b+1) = 16$ ...(1)
$(a+1)(b+1) = 24$ ...(2)
Dividiendo (1) y (2): $\frac{a}{a+1} = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$3a = 2a + 2$
$a = 2$
En (1): $b = 7$
Luego: $a = 2$ y $b = 7$, nos piden $a \times b = 14$.

7 Se tiene el número $N = 2^a \times 5 \times 7$ donde la suma de sus divisores es 720. Halla a.

Resolución:

Se sabe que la suma de sus divisores es:

$$SD(N) = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} \times \frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \times \frac{7^{1+1} - 1}{7 - 1}$$

$720 = (2^{a+1} - 1) \times 6 \times 8$
$15 = 2^{a+1} - 1$
$16 = 2^{a+1}$
$2^4 = 2^{a+1}$
Luego: $a + 1 = 4$
$\Rightarrow a = 3$

8 Si $N = 30^n . 15$ tiene 144 divisores múltiplos de 2, halla n^3.

Resolución:

$N = 30^n \times 15 = 3^{n+1} \times 5^{n+1} \times 2^n$
Hallamos los divisores múltiplos de 2:
$N = 2(3^{n+1} \times 5^{n+1} \times 2^{n-1})$
Entonces: $CD_{\overset{\circ}{2}}(N) = (n + 2)(n + 2)\, n = 144$
$(n + 2)^2 n = 144 = 6^2 \times 4$
$n + 2 = 6$
$\Rightarrow n = 4$
Nos piden: $n^3 = 4^3 = 64$

9 Si $\overline{aabb}$ tiene 21 divisores, calcula a + b, si se sabe que uno de sus divisores es el número 8.

Resolución:

Como:
$CD(\overline{aabb}) = 21 = (2 + 1)(6 + 1)$
$\Rightarrow \overline{aabb} = m^2 \times n^6$ ... (1)
Del enunciado: $\overline{aabb} = \overset{\circ}{8} \Rightarrow \overline{aabb} = \overset{\circ}{2}$
$m = 2 \vee n = 2$ ($n = 2$, ya que: $m^2 = 2^2 \neq \overset{\circ}{8}$)
Además: $\overline{aabb} = 100 \times \overline{aa} + \overline{bb} = 11(100a + b)$
Luego, 11 es un divisor de $\overline{aabb}$, entonces: $m = 11$
Reemplazando el valor de m y n en (1):
$\overline{aabb} = 11^2 \times 2^6 = 121 . 64 = 7744$
$\Rightarrow a = 7 \wedge b = 4$
$\therefore a + b = 11$

10 Si sabemos que $\overline{bb}$ tiene cuatro divisores, da la suma de todos los posibles valores de b.

Resolución:

Se tiene: $\overline{bb} = 10b + b = 11b$
Del enunciado:

$CD(\overline{bb}) = 4 <$ $3 + 1$; $(1 + 1) \times (1 + 1)$

Si $CD(\overline{bb}) = 3 + 1$, entonces $\overline{bb}$ tiene un divisor primo y es de la forma p^3 (p es primo), pero $\overline{bb}$ tiene como divisores a 11 y a b (una cifra), por lo tanto este caso no se puede dar.

Si $CD(\overline{bb}) = (1 + 1) \times (1 + 1)$, entonces $\overline{bb}$ es de la forma $p \times q$ (p y q son números primos distintos), pero como $\overline{bb}$ tiene como divisores a 11 y a b (una cifra), este último debe ser un número primo.

Luego:
$b \in \{2, 3, 5, 7\}$
$\therefore$ La suma de valores de b es: $2 + 3 + 5 + 7 = 17$

11 Calcula la suma de los divisores de 120 que son múltiplos de 12.

Resolución:

$120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Hallamos la suma de los divisores de 120 múltiplos de 12:
$120 = 12 \times (2^2 \times 5)$

$$SD_{\overset{\circ}{12}} = \left(\frac{2^3 - 1}{2 - 1}\right) \times \left(\frac{5^2 - 1}{5 - 1}\right) \Rightarrow SD_{\overset{\circ}{12}} = 7 \times 6 = 42$$

12 ¿Cuántos divisores pares tiene el número 2438?

Resolución:

$2438 = 53 \times 23 \times 2$
Nos piden hallar la cantidad de divisores pares, es decir, divisores $\overset{\circ}{2}$, entonces:
$2438 = 2 \times (23 \times 53)$
$CD_{\overset{\circ}{2}} = (1 + 1)(1 + 1) = 4$

13 Si $2^\alpha \times a^2$ tiene 12 divisores cuya suma es 195, halla $\alpha + a$. (a es un número primo impar menor que 11)

Resolución:

Sea $N = 2^\alpha \times a^2$, luego:
$CD(N) = (\alpha + 1)(3) = 12 \Rightarrow \alpha = 3$

$$SD(N) = \left(\frac{2^4 - 1}{2 - 1}\right) \times \left(\frac{a^3 - 1}{a - 1}\right) = 195$$

$$= 15 \times \left(\frac{a^3 - 1}{a - 1}\right) = 15 \times 13 \Rightarrow a = 3 \therefore \alpha + a = 6$$

14 ¿Cuántos divisores debe tener un numeral cuya descomposición canónica es $a^{n-1} \times b^{n+1}$ para que su cuadrado tenga 45 divisores?

Resolución:

Sea $N = a^{n-1} \times b^{n+1}$, entonces: $N^2 = a^{2(n-1)} \times b^{2(n+1)}$

Del enunciado:
$CD(N^2) = (2n - 1)(2n + 3) = 45$
$(2n - 1)(2n + 3) = 5 \times 9$

$\Rightarrow n = 3 \wedge CD(N) = n(n + 2) = 15$

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Atención

Los divisores comunes de un conjunto de números son también divisores de su MCD.



Nota

- $\frac{A}{MCD(A;B;C)} = p$, $\frac{B}{MCD(A;B;C)} = q$, $\frac{C}{MCD(A;B;C)} = r$ → p, q, r PESÍ
- MCD(1; A; B; C; ...) = 1

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

El máximo común divisor de dos o más números enteros positivos, es el mayor de todos sus divisores comunes positivos.

Ejemplo:

Divisores de 12: 1; 2; 3; 4; 6; 12

Divisores de 18: 1; 2; 3; 6; 9; 18 ➡ Divisores comunes: 1; 2; 3; 6

Divisores de 30: 1; 2; 3; 5; 6; 10; 15; 30

De todos los divisores comunes de 12; 18 y 30; el mayor es 6; por lo tanto: MCD(12; 18; 30) = 6

Métodos para calcular el máximo común divisor

Por descomposición canónica	Por descomposición simultánea
Se descompone en factores primos cada uno de los números dados para luego multiplicar sus factores comunes elevados al menor exponente. Ejemplo: $5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$ $4860 = 2^2 \times 3^5 \times 5^1$ (circulados: 2^2, 5^1) $18\,000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$ (circulado: 3^2) $MCD(5400; 4860; 18\,000) = 2^2 \times 3^2 \times 5$	Se extrae de manera simultánea los factores comunes (únicamente) de los números dados para luego multiplicarlos. Ejemplo: 96 - 120 - 180 | 2 48 - 60 - 90 | 2 24 - 30 - 45 | 3 8 - 10 - 15 | (2, 2, 3) × MCD(96; 120; 180) = 2 × 2 × 3 = 12

Atención

Los múltiplos comunes de un conjunto de números son también múltiplos de su MCM.



Nota

$\frac{MCM(A;B;C)}{A} = p$, $\frac{MCM(A;B;C)}{B} = q$, $\frac{MCM(A;B;C)}{C} = r$ → p, q, r PESÍ

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

El mínimo común múltiplo de dos o más números enteros positivos, es el menor de todos sus múltiplos comunes positivos.

Ejemplo:

Múltiplos de 4: 4; 8; 12; 16; 20; 24; 30; 36; ...

Múltiplos de 6: 6; 12; 18; 24; 30; 36; ... ➡ Múltiplos comunes: 12; 24; 36; ...

Múltiplos de 12: 12; 24; 36; 48; 60; ...

De todos los múltiplos comunes de 4; 6 y 12; el menor es 12; por lo tanto: MCM(4; 6; 12) = 12

Métodos para calcular el mínimo común múltiplo

Por descomposición canónica	Por descomposición simultánea
Se descompone canónicamente cada uno de los números dados, para luego multiplicar sus factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente. Ejemplo: $168 = 2^3 \times 3 \times 7$ (circulados: 2^3, 7) $396 = 2^2 \times 3^2 \times 11$ (circulado: 11) $270 = 2 \times 3^3 \times 5$ (circulados: 3^3, 5) $MCM(168; 396; 270) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 \times 11$	Se extrae de manera simultánea los factores comunes y no comunes de los números dados, para luego multiplicarlos. Ejemplo: 12 - 18 - 30 | 2 6 - 9 - 15 | 2 3 - 9 - 15 | 3 1 - 3 - 5 | 3 1 - 1 - 5 | 5 1 - 1 - 1 | (2, 2, 3, 3, 5) × MCM(12; 18; 30) = 2 × 2 × 3 × 3 × 5 = 180

Observación

1. $A = \overset{\circ}{\overline{MCD(A;B)}}$

   $B = \overset{\circ}{\overline{MCD(A;B)}}$

2. $MCM(A;B) = \overset{\circ}{A}$

   $MCM(A;B) = \overset{\circ}{B}$



PROPIEDADES DEL MCD Y EL MCM

1. Si A y B son PESÍ, entonces:
   MCD(A; B) = 1
   MCM(A; B) = A × B
2. Si $A = \overset{\circ}{B}$, entonces:
   MCD(A; B) = B
   MCM(A; B) = A
3. MCD(kA; kB; kC) = k × MCD(A; B; C)
   MCM(kA; kB; kC) = k × MCM(A; B; C)
4. Para 2 números A y B se cumple:
   MCM(A; B) × MCD(A; B) = A × B
5. Si MCD(A; B) = d; A = dp y B = dq, siendo p y q PESÍ, se cumple:
   MCM(A; B) = dpq
6. $MCD\left(\frac{A}{k}; \frac{B}{k}; \frac{C}{k}\right) = \frac{MCD(A; B; C)}{k}$

   $MCM\left(\frac{A}{k}; \frac{B}{k}; \frac{C}{k}\right) = \frac{MCM(A; B; C)}{k}$

Problemas resueltos



1 Halla el valor de n si $A = 3^n \times 4^n$ y $B = 2^n \times 6$; además $MCD(A; B) = 48$ $(n \in \mathbb{Z}^+)$.

Resolución:

Descomponemos canónicamente:

$A = 3^n \times 2^{2n}$ y $B = 2^{n+1} \times 3$

Para hallar el MCD de A y B multiplicamos sus factores comunes elevados al menor exponente, entonces, como:

$n \geqslant 1 \wedge 2n \geqslant 1 + n$

Se tiene: $MCD(A; B) = 2^{n+1} \times 3$

Pero, por dato:

$MCD(A; B) = 48$

$2^{n+1} \times 3 = 2^4 \times 3$

$2^{n+1} = 2^4$

$\Rightarrow n + 1 = 4$

$n = 3$

2 ¿Cuál es el menor número que tiene como divisores a 24; 84; 90 y 54?

Resolución:

El menor número que tiene como divisores a 24; 84; 90 y 54 es el mínimo común múltiplo de estos números.

Entonces, aplicamos la descomposición simultánea:

24 -	84 -	90 -	54	2
12 -	42 -	45 -	27	2
6 -	21 -	45 -	27	2
3 -	21 -	45 -	27	3
1 -	7 -	15 -	9	3
1 -	7 -	5 -	3	3
1 -	7 -	5 -	1	5
1 -	7 -	1 -	1	7
1 -	1 -	1 -	1	

$\therefore MCM(24; 84; 90; 54) = 2^3 \times 3^3 \times 5 \times 7 = 756$

3 Calcula k si $MCD(21k; 30k; 42k) = 120$.

Resolución:

Por propiedad:

$MCD(21k; 30k; 42k) = 120$

$k \times MCD(21; 30; 42) = 120$

Calculamos MCD(21; 30; 42) mediante descomposición simultánea:

21 -	30 -	42	3
7 -	10 -	14	

$MCD(21; 30; 42) = 3$

Luego: $3k = 120 \Rightarrow k = 40$

4 ¿Cuántos divisores comunes tienen los números 168; 231 y 105?

Resolución:

Sabemos que los divisores comunes de un conjunto de números son también divisores de su MCD.

Calculamos el MCD de 168; 231 y 105:

168 -	231 -	105	3
56 -	77 -	35	7
8 -	11 -	5	

$\Rightarrow MCD(168; 231; 105) = 3 \times 7 = 21$

Luego, los divisores comunes de 168; 231 y 105 son: 1; 3; 7 y 21

Por lo tanto: 168; 231 y 105 tienen 4 divisores comunes.

5 ¿Cuántos múltiplos positivos comunes de 4 cifras tienen los números 36, 40 y 28?

Resolución:

Sabemos que los múltiplos comunes de un conjunto de números son también múltiplos de su MCM.

Calculamos el MCM de 36; 40 y 28, mediante descomposición simultánea.

36 -	40 -	28	2
18 -	20 -	14	2
9 -	10 -	7	2
9 -	5 -	7	3
3 -	5 -	7	3
1 -	5 -	7	5
1 -	1 -	7	7
1 -	1 -	1	

$\Rightarrow MCM(36; 40; 28) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520$

Nos piden los múltiplos comunes de 4 cifras, entonces:

$\overset{\circ}{2520}$: ...; –2520; 0; $\underbrace{2520; 5040; 7560}$; 10 080; 12 600; ...

Múltiplos positivos comunes de 4 cifras

Por lo tanto, los números 36; 40 y 28 tienen 3 múltiplos positivos comunes de 4 cifras.

6 El producto de dos números es 2940 y el cociente del MCM y el MCD de ellos es 15. Halla el MCD.

Resolución:

Sean A y B dichos números.

Del enunciado:

$\dfrac{MCM(A; B)}{MCD(A; B)} = 15 \wedge A \times B = 2940$

Además, se cumple: $A \times B = MCM(A; B) \times MCD(A; B)$

Luego, en la expresión anterior se tiene:

$$\frac{MCM(A; B) \times MCD(A; B)}{[MCD(A; B)]^2} = 15$$

$$\frac{2940}{[MCD(A; B)]^2} = 15$$

$\Rightarrow [MCD(A; B)]^2 = 196$

$MCD(A; B) = 14$

7 Si $A = 12B$ y $MCD(A; B) = 15$; calcula $A + B$.

Resolución:

Se observa que $A = \overset{\circ}{B}$, entonces se cumple:

$B = \underbrace{MCD(A; B)} = 15$

$B = 15$

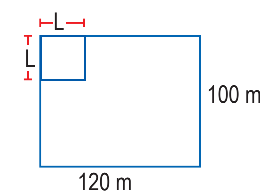
$\Rightarrow A = 12 \times 15$

$A = 180$

Nos piden: $A + B = 180 + 15 = 195$

8 Se tiene un terreno rectangular de 120 m por 100 m, se le quiere parcelar en lotes cuadrados y lo más grande posible. ¿Cuántos lotes se obtendrán?

Resolución:



Entonces: L = MCD(100; 120)

Por descomposición simultánea

100	- 120	2
50	- 60	2
25	- 30	5
5	- 6	

Luego: $L = 2 \times 2 \times 5 = 20$ m

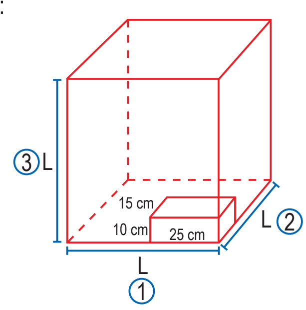
Nos piden: nº. de lotes $= \left(\frac{100}{L}\right) \times \left(\frac{120}{L}\right) = \frac{100}{20} \times \frac{120}{20}$

$= 5 \times 6 = 30$ lotes.

9 Se trata de formar un cubo con ladrillos cuyas dimensiones son 25 cm de largo, 15 cm de ancho y 10 de alto. ¿Cuántos ladrillos son necesarios para formar el cubo más pequeño y compacto?

Resolución:

Gráficamente:



Se tiene el cubo de arista igual a L, formado por los ladrillos.

En 1: L = (25 cm) × a
↳ Cantidad de ladrillos en el largo ①.

En 2: L = (15 cm) × b
↳ Cantidad de ladrillos en el ancho ②.

En 3: L = (10 cm) × c
↳ Cantidad de ladrillos de alto ③.

Entonces, se observa que L es un múltiplo común de 25; 15 y 10; es decir:

$L = \overline{\text{MCM}(25; 15; 10)}^{\circ} \Rightarrow L = \overset{\circ}{150}$

El cubo más pequeño tendrá una arista de longitud igual a 150 cm.

Luego:

$a = \frac{150}{25} = 6$

$b = \frac{150}{15} = 10$

$c = \frac{150}{10} = 15$

Por lo tanto, la cantidad total de ladrillos que tendrá el cubo de menor tamaño es:

$a \times b \times c = 6 \times 10 \times 15 = 900$ ladrillos

10 El número de páginas de un libro es mayor que 400 y menor que 500. Si se las cuenta de 2 en 2 sobra una, de 3 en 3 sobran dos, de 5 en 5 sobran cuatro y de 7 en 7 sobran 6. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Resolución:

Sea N el número de páginas del libro, entonces:

$N = \overset{\circ}{2} + 1 = \overset{\circ}{2} - 1 \Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{2}$

$N = \overset{\circ}{3} + 2 = \overset{\circ}{3} - 1 \Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{3}$

$N = \overset{\circ}{5} + 4 = \overset{\circ}{5} - 1 \Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{5}$

$N = \overset{\circ}{7} + 6 = \overset{\circ}{7} - 1 \Rightarrow N + 1 = \overset{\circ}{7}$

Luego:

$N + 1 = \overline{\text{MCM}(2; 3; 5; 7)}^{\circ}$

$N + 1 = \overset{\circ}{210}$

$N = 210k - 1;\ k \in \mathbb{Z}^+$

$400 < 210k - 1 < 500$

$1{,}95 < k < 2{,}39 \Rightarrow k = 2$

Por lo tanto:

$N = 210(2) - 1 \Rightarrow N = 419$

11 Si $A = 10^n \times 15^{2n+1}$ y $B = 15^n \times 10^{2n}$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ tienen 325 divisores comunes. Calcula n.

Resolución:

- $A = 10^n \times 15^{2n+1}$
  $A = 2^n \times 5^n \times 3^{2n+1} \times 5^{2n+1}$
  $A = 2^n \times 3^{2n+1} \times 5^{3n+1}$
- $B = 15^n \times 10^{2n}$
  $B = 3^n \times 5^n \times 2^{2n} \times 5^{2n}$
  $B = 2^{2n} \times 3^n \times 5^{3n}$

$\text{MCD}(A; B) = 2^n \times 3^n \times 5^{3n}$

$\text{CD}[\text{MCD}(A; B)] = (n + 1)(n + 1)(3n + 1) = 325$

$\Rightarrow (n + 1)^2 . (3n + 1) = 5^2 \times 13$

$\therefore\ n = 4$

12 Si MCD(A; B) = MCD(B; C) = MCD(A; C) = 19; MCM(A; B; C) = 19 019 y A + B + C = 589, halla: $\frac{8}{19}A^2 - \frac{B^2}{121} - C$, si A < B < C

Resolución:

Del enunciado: A = 19p; B = 19q; C = 19r; (p, q y r son PESI)

También: MCM(A; B; C) = 19 019

MCM(19p; 19q; 19r) = 19 019

19 × MCM(p; q; r) = 19 019

MCM(p; q; r) = 1001

p × q × r = 7 × 11 × 13; (p, q y r son PESÍ)

Como: A + B + C = 589

19(p + q + r) = 19 × 31

p + q + r = 31

⇒ p = 7; q = 11; r = 13

Piden: $\frac{8}{19}A^2 - \frac{B^2}{121} + C = \frac{8}{19}(133)^2 - \frac{(209)^2}{121} - 247 = 6840$



CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)



DEFINICIÓN

Al cociente de la división de dos números enteros a y b, donde b es diferente de cero, se le denomina número racional. Todos los números racionales constituyen el conjunto de números racionales denotados por $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,/\, a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

NÚMERO FRACCIONARIO

Se denomina así a todos aquellos números racionales que no representan a números enteros.

Ejemplos:

$\underbrace{\frac{1}{6}; \frac{4}{8}; \frac{10}{6}; \frac{-3}{7}; \frac{-12}{-10}}_{\text{Son números fraccionarios}}$ $\underbrace{\frac{-19}{19}; \frac{-18}{2}; \frac{16}{8}; \frac{21}{7}; \frac{8}{4}}_{\text{No son números fraccionarios}}$

FRACCIÓN

Se denomina fracción al número fraccionario que presenta sus dos términos positivos.

Forma general:

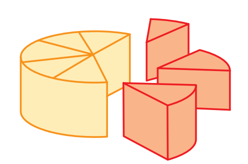
$$f = \frac{N}{D}; N, D \in \mathbb{Z}^+; N \neq \overset{\circ}{D}$$

Donde: N: numerador
D: denominador



Representación gráfica

Veamos qué representa la fracción $\frac{3}{8}$.



$\frac{3}{8}$ → Numerador (parte)
→ Denominador (todo)

Se observa:

1. El denominador (8) indica en cuántas partes se divide el todo (unidad de referencia).
2. El numerador (3) representa las partes del todo (unidad de referencia) que se toman o que se observan.

Clasificación de fracciones

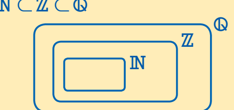
Por comparación de sus términos	Por grupos de fracciones
Propias. Cuando el numerador es menor que el denominador. Ejemplos: $\frac{5}{9}; \frac{45}{100}; \frac{98}{99}$ **Impropias.** Cuando el numerador es mayor que el denominador. Ejemplos: $\frac{23}{2}; \frac{5}{4}; \frac{200}{6}$	**Homogéneas.** Dos o más fracciones se dicen que son homogéneas cuando todas poseen el mismo denominador. Ejemplo: $\frac{23}{41}; \frac{3}{41}$ y $\frac{18}{41}$ son homogéneas **Heterogéneas.** Dos o más fracciones se dicen que son heterogéneas cuando al menos una de ellas no posee el mismo denominador que las demás. Ejemplo: $\frac{2}{9}; \frac{17}{41}$ y $\frac{8}{16}$ son heterogéneas
Por los divisores comunes entre sus términos	**Por su denominador**
Reductibles. Son todas aquellas fracciones cuyo numerador y denominador poseen algún divisor común distinto de 1. Ejemplos: $\frac{2}{4}; \frac{3}{9}; \frac{12}{72}$ **Irreductibles.** Son aquellas fracciones cuyo numerador y denominador poseen como único divisor común a la unidad (PESÍ). Ejemplos: $\frac{5}{4}; \frac{4}{17}; \frac{24}{35}$	**Ordinarios.** Cuando su denominador es diferente de una potencia de 10, (denominador diferente de 10^n; $n \in \mathbb{Z}^+$). Ejemplos: $\frac{2}{7}; \frac{9}{23}; \frac{25}{15}$ **Decimales.** Cuando su denominador es igual a una potencia de 10 (denominador igual a 10^n; $n \in \mathbb{Z}^+$). Ejemplos: $\frac{2}{100}; \frac{137}{1000}; \frac{27}{10}$

Nota

Si a, b $\in \mathbb{Q}$, con a < b, entonces existe un c $\in \mathbb{Q}$ tal que a < c < b, a dicha propiedad se le llama **densidad de $\mathbb{Q}$**.

Atención

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$



Observación

Propiedades de la adición de los números racionales

Clausura
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

Conmutatividad
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

Asociatividad
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}:$
$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$

Elemento neutro aditivo
$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

Elemento inverso aditivo
$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}: \exists \frac{-a}{b} \in \mathbb{Q} / \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = 0$

Propiedades de la multiplicación de los números racionales

Clausura
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

Conmutatividad
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$

Asociatividad
$\forall \frac{a}{b}; \frac{c}{d}; \frac{e}{f} \in \mathbb{Q}:$
$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f}$

Elemento neutro multiplicativo
$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}: \frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$

Elemento inverso multiplicativo
$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}: \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$

Nota

Propiedad distributiva de los números racionales
$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

Nota

La fracción $f = \frac{N}{D}$ es irreductible si y solo si MCD(N; D) = 1.

Observación

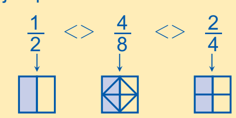
Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes cuando con términos distintos expresan la misma porción de la unidad.

Se denota: $\frac{a}{b} <> \frac{c}{d}$

Ejemplo:

$\frac{1}{2} <> \frac{4}{8} <> \frac{2}{4}$

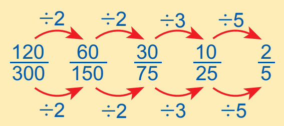


Atención

Simplificación de fracciones

Para simplificar una fracción se divide al numerador y denominador por una misma cantidad que los divida exactamente.

Ejemplo:



Nota

Todo número mixto es equivalente a una fracción impropia.

Ejemplo:

$7\frac{2}{5} = \frac{5 \times 7 + 2}{5} = \frac{37}{5}$



Nota

Sean las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$.

1. Si $a \times d < b \times c \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$
2. Si $a \times d > b \times c \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

Recuerda

Para leer una fracción, se menciona primero el numerador y luego el denominador; para la lectura de este último se debe considerar:

- Si el denominador es 2; 3; 4; ... (diferente de una potencia de 10) se leerán medios, tercios, cuartos, ...
- Si el denominador es 10; 100; 1000; ... (potencias de 10) se leerán décimos, centésimos, milésimos, ...

Número mixto

Un número mixto está formado por un número entero positivo y una fracción propia.

Ejemplos: $9\frac{3}{7}; 2\frac{5}{9}; 9\frac{2}{5}$

Conversión de número mixto a fracción impropia	Conversión de fracción impropia a número mixto
Para convertir un número mixto a fracción impropia se multiplica la parte entera por el denominador y a este producto se le suma el numerador, el denominador de la fracción es el mismo. Ejemplo: $4\frac{7}{10} = \frac{4 \times 10 + 7}{10}$ $4\frac{7}{10} = \frac{47}{10}$	Para convertir a número mixto una fracción impropia, se divide el numerador por el denominador. El cociente será el entero del número mixto, y el resto, el Numerador de la fracción, siendo el denominador el mismo. Ejemplo: Vamos a convertir la fracción $\frac{13}{5}$ a número mixto. 13 | 5 ; 10 | 2 ; resto 3 $\Rightarrow \frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$

Comparación de fracciones

1. Si las fracciones son homogéneas, será mayor la que tenga mayor numerador.

   Ejemplo:

   Dadas las fracciones $\frac{17}{23}; \frac{8}{23}$ y $\frac{25}{23}$; como $8 < 17 < 25$, entonces: $\frac{8}{23} < \frac{17}{23} < \frac{25}{23}$

2. Si las fracciones son heterogéneas, podemos emplear dos procedimientos:
   - **Dando común denominador.** Se halla el MCM de los denominadores y el nuevo numerador se hallará multiplicando el numerador inicial por el cociente del MCM entre el denominador inicial.

     Ejemplo:

     Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{7}{8}; \frac{1}{4}; \frac{5}{12}$

     Hallamos MCM(8; 12; 4) = 24; entonces:

     $$\frac{7 \times (24 \div 8)}{24}; \frac{1 \times (24 \div 4)}{24}; \frac{5 \times (24 \div 12)}{24}$$

     Luego: $\frac{21}{24}; \frac{6}{24}; \frac{10}{24}$

     Se procede como en el caso de fracciones homogéneas:

     $$6 < 10 < 21 \Rightarrow \frac{6}{24} < \frac{10}{24} < \frac{21}{24} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{5}{12} < \frac{7}{8}$$

   - **Dando común numerador.** Se procede de manera similar al método anterior, pero ahora se homogeniza los numeradores hallando el MCM de estos. El nuevo denominador se hallará multiplicando el denominador inicial por el cociente de dividir el MCM entre el numerador inicial. La mayor fracción será la que tenga menor numerador (y viceversa).

     Ejemplo:

     Ordena de menor a mayor las siguientes fracciones: $\frac{6}{9}; \frac{3}{7}; \frac{9}{11}$

     Hallamos el MCM(6; 3; 9) = 18; entonces:

     $$\frac{18}{9 \times (18 \div 6)}; \frac{18}{7 \times (18 \div 3)}; \frac{18}{11 \times (18 \div 9)}$$

     Luego: $\frac{18}{27}; \frac{18}{42}; \frac{18}{22}$

     Como 42 > 27 > 22; se tiene:

     $$\frac{18}{42} < \frac{18}{27} < \frac{18}{22} \Rightarrow \frac{3}{7} < \frac{6}{9} < \frac{9}{11}$$

Operaciones con fracciones

Adición y sustracción de fracciones

Se presentan tres casos:

1. **Cuando las fracciones tienen un mismo denominador.** Se suman los numeradores y al resultado se le pone el mismo denominador común.

   Ejemplo: $\frac{7}{48} + \frac{12}{48} + \frac{3}{48} + \frac{5}{48} = \frac{7 + 12 + 3 + 5}{48} = \frac{27}{48}$



2. **Cuando las fracciones tienen distintos denominadores.** Se homogenizan los denominadores de las fracciones y se procede como en el caso anterior.

   Ejemplo:

   Efectúa: $\frac{7}{12}+\frac{9}{20}-\frac{3}{4}$

   Hallamos MCM(12; 20; 4) = 60; entonces:

   $$\frac{7\times(60\div12)}{60}+\frac{9\times(60\div20)}{60}-\frac{3\times(60\div4)}{60}=\frac{35}{60}+\frac{27}{60}-\frac{45}{60}=\frac{17}{60}$$

3. **Cuando las fracciones van acompañadas por números enteros.** Se operan, primero las fracciones, luego los enteros, añadiendo a estos el resultado de efectuar las fracciones.

   Ejemplo:

   Efectúa: $8+\frac{5}{7}-3\,\frac{4}{11}$

   Operamos las fracciones: $\frac{5}{7}-\frac{4}{11}=\frac{55}{77}-\frac{28}{77}=\frac{27}{77}$

   Operamos los enteros: $8-3=5$

   Luego: $8+\frac{5}{7}-3-\frac{4}{11}=5+\frac{27}{77}=\frac{5\times77+27}{77}=\frac{412}{77}$

Multiplicación de fracciones

Se presentan dos casos:

1. **Multiplicación de una fracción por otra fracción.** Se multiplican los numeradores correspondientes y se divide por el resultado de multiplicar los denominadores.

   Ejemplo: $\frac{3}{12}\times\frac{5}{2}\times\frac{7}{11}=\frac{3\times5\times7}{12\times2\times11}=\frac{105}{264}$

2. **Multiplicación de una fracción por un número entero.** Se multiplica el numerador por el número entero y se escribe el mismo denominador.

   Ejemplo: $43\times\frac{17}{23}=\frac{43\times17}{23}=\frac{731}{23}$

División de fracciones

Se presentan dos casos:

1. **División de una fracción entre otra fracción.** Se multiplica la primera fracción por la fracción inversa de la segunda.

   Ejemplo: $\frac{4}{13}\div\frac{7}{16}=\frac{4}{13}\times\frac{16}{7}=\frac{4\times16}{13\times7}=\frac{64}{91}$

   Fracción inversa

2. **División de una fracción entre un número entero.** Se multiplica la fracción por la inversa del número entero.

   Ejemplo: $\frac{16}{25}\div7=\frac{16}{25}\times\frac{1}{7}=\frac{16}{175}$

   Inversa

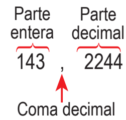
NÚMEROS DECIMALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción.

Ejemplos:

- $\frac{2}{5}=0{,}4$
- $\frac{57}{20}=2{,}85$
- $\frac{6}{15}=4{,}46666...$

Un número decimal presenta una parte entera y otra parte decimal.



Orden de las cifras de un número decimal

Para el número decimal 2495,3476; se tiene:

Orden ← | Orden →

3	2	1	0		–1	–2	–3	–4
2	4	9	5	,	3	4	7	6

Nota

Sea $f=\frac{N}{D}$ una fracción irreductible; a partir de f se podrán obtener fracciones equivalentes a ella, multiplicando al numerador y el denominador por una misma cantidad.

Ejemplo:

$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=...$

$=\frac{1\times k}{2\times k};k\in\mathbb{Z}^+$

Se dice que $\frac{1}{2}$ es el representante canónico de todo ese grupo de fracciones.

Observación:

Potenciación de fracciones

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Radicación de fracciones

$$\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};\ n\in\mathbb{Z}^+,\ n\geq2$$



Nota

La división de fracciones también se puede realizar de la siguiente manera:

- $\dfrac{\frac{4}{13}}{\frac{7}{16}}=\frac{4\times16}{13\times7}=\frac{64}{91}$
- $\dfrac{\frac{16}{25}}{\frac{7}{1}}=\frac{16}{175}$

Atención

- Fracción generatriz de un número decimal exacto:

  $0,\overline{abc} = \frac{abc}{1000}$

- Fracción generatriz de un número decimal inexacto periódico puro:

  $0,\widehat{xyz} = \frac{xyz}{999}$

- Fracción generatriz de un número decimal inexacto periódico mixto:

  $0,\overline{abc}\widehat{xyzt} = \frac{abcxyzt - abc}{9\,999\,000}$

- Si se tiene el número decimal $3,\widehat{21}$ entonces lo expresamos así:

  $3,\widehat{21} = 3 + 0,\widehat{21}$

  $= 3 + \frac{21}{99} = \frac{318}{99}$

Observación

Comparación de números decimales

- Se comparan las partes enteras.
- Si las partes enteras son iguales, se comparan las partes decimales.

Ejemplos:

- 781,2157 $\boxed{>}$ 123,354 ($781 > 123$)
- 12,53284 $\boxed{<}$ 12,53751 ($2 < 7$)

Atención

Redondeo de números decimales

- Se determina el lugar al que se va a redondear.
- Si el dígito siguiente es menor que 5, entonces se eliminan las cifras de la derecha.
- Si el dígito siguiente es mayor o igual que 5, entonces se agrega uno a la cifra elegida y se eliminan las cifras de la derecha.

Ejemplos:

- 0,27⑥4 = 0,276
- 2,7②5 = 2,73

Nota

Potenciación y radicación de números decimales

- $(0,\widehat{7})^2 = \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{7^2}{9^2} = \frac{49}{81}$
- $\sqrt{0,0\widehat{27}} = \sqrt{\frac{25}{900}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Clasificación de los números decimales

Número decimal exacto	Son los números decimales cuya parte decimal tiene un número finito de cifras. Se obtiene de una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos solo a 2 y/o 5. Ejemplos: • $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 0,25$ • $\frac{9}{40} = \frac{9}{2^3 \times 5} = 0,225$
Número decimal inexacto	Son los números decimales que tienen un número ilimitado de cifras decimales. Estos números decimales pueden ser, a su vez de dos tipos: **Número decimal inexacto periódico puro.** Son los números decimales en los que la parte decimal se repite periódicamente. Es generado por una fracción decimal irreductible cuyo denominador no tiene como divisores primos a 2 ni a 5. Ejemplos: • $\frac{2}{3} = 0,666... = 0,\widehat{6}$ • $\frac{5}{11} = 0,4545... = 0,\widehat{45}$ **Número decimal inexacto periódico mixto.** Son los números decimales en cuya parte decimal hay una parte periódica y otra no periódica. Se generan a partir de una fracción irreductible cuyo denominador tiene como divisores primos a 2 y/o 5, y otros. Ejemplos: • $\frac{5}{6} = 0,8333... = 0,8\widehat{3}$ • $\frac{17}{45} = 0,3777... = 0,3\widehat{7}$

Operaciones con números decimales

Adición y sustracción de números decimales

1. Si se trata de decimales exactos, buscamos que tengan la misma cantidad de cifras en la parte decimal completando con ceros.
2. Al sumar o restar, escribimos un número bajo el otro cuidando que la coma decimal esté alineada para luego operar como si se tratara de números enteros.
3. En el resultado, volvemos a escribir la coma decimal en la misma línea vertical que los demás.

   Ejemplo:

   Efectúa: 7,3 + 15,18 + 2,0156

```
  7,3000 +
 15,1800
  2,0156
 -------
 24,4956
```

Multiplicación de números decimales

1. Multiplicamos los números como si se trataran de números enteros, es decir, sin considerar la coma decimal.
2. Para ubicar la coma, se considerará que el resultado tenga tantos decimales como cifras decimales tienen entre los dos factores.

   Ejemplo:

   Efectúa: 2,53 × 3,4.

```
  253×
   34
 ----
 1012
 759
 ----
 8602
```

→ Se observa que entre los dos factores hay 3 decimales, entonces ubicamos la coma decimal en el producto: 2,53 × 3,4 = 8,602

División de números decimales

1. Se iguala la cantidad de cifras en la parte decimal del dividendo y del divisor.
2. Se suprimen las comas decimales y se procede a dividir con los números enteros obtenidos.
3. Después de obtener el resto de la división, se continúa agregando un cero a su derecha, a la vez que se coloca la coma decimal a continuación del cociente.
4. Seguimos con la operación colocando ceros a la derecha de los restos obtenidos hasta obtener cero o hasta que se considere conveniente.

   Ejemplo:

   Efectúa: 10,143 ÷ 3,15

   - Igualamos la cantidad de decimales: 10,143 ÷ 3,150
   - Eliminamos las comas decimales: 10 143 ÷ 3150
   - Efectuamos la división:

```
 10143 | 3150
  9450   3,22
  ----
   6930
   6300
   ----
    6300
    6300
    ----
    - - -
```

Luego:
10,143 × 3,15 = 3,22

Problemas resueltos

A

1 Halla la fracción generatriz de $0,1\widehat{7}$.

Resolución:

$0,1\widehat{7} = \dfrac{17-1}{90}$

$= \dfrac{16}{90}$

$= \dfrac{8}{45}$

La fracción generatriz de $0,1\widehat{7}$ es: $\dfrac{8}{45}$

2 Halla la fracción generatriz de 0,5832.

Resolución:

$0,5832 = \dfrac{5832}{10\,000}$

Sacamos cuarta y mitad a ambos:

$\dfrac{5832}{10\,000} = \dfrac{1458}{2500} = \dfrac{729}{1250}$

$\therefore 0,5832 = \dfrac{729}{1250}$

3 Efectúa:

$P = \sqrt{0,6 + 0,7\widehat{3} + 0,00\widehat{75}}$

Resolución:

$P = \sqrt{\dfrac{6}{10} + \dfrac{73}{100} + \left(\dfrac{75}{10\,000}\right)}$

$P = \sqrt{\dfrac{6}{10} + \dfrac{73}{100} + \dfrac{3}{400}}$

$P = \sqrt{\dfrac{240}{400} + \dfrac{292}{400} + \dfrac{3}{400}} = \sqrt{\dfrac{535}{400}}$

$\therefore P = \dfrac{\sqrt{535}}{20}$

4 Efectúa:

$P = \dfrac{0,63}{0,64} + \dfrac{0,7}{0,8} + \dfrac{7}{0,4}$

Resolución:

$P = \dfrac{\frac{63}{100}}{\frac{64}{100}} + \dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{8}{10}} + \dfrac{7}{\frac{4}{10}}$

$P = \dfrac{63}{64} + \dfrac{7}{8} + \dfrac{70}{4}$

$P = \dfrac{63}{64} + \dfrac{56}{64} + \dfrac{1120}{64} = \dfrac{1239}{64}$

$\therefore P = \dfrac{1239}{64}$

5 Halla: $S = \dfrac{\frac{4}{7} + \frac{1}{8}}{\frac{4}{14}} + \dfrac{25}{36}$

Resolución:

$\dfrac{4}{7} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{32+7}{56} = \dfrac{39}{56}$

$\dfrac{\frac{39}{56}}{\frac{4}{14}} = \dfrac{39 \times 14}{56 \times 4} = \dfrac{39}{16}$

$S = \dfrac{39}{16} + \dfrac{25}{36} = \dfrac{351+100}{144} = \dfrac{451}{144}$

6 ¿Cuántas fracciones impropias de denominador 120 están comprendidas entre $\dfrac{4}{3}$ y $\dfrac{5}{2}$?

Resolución:

Sea la fracción: $\dfrac{n}{120} > 1$

Luego: $\dfrac{4}{3} < \dfrac{n}{120} < \dfrac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad 160 < n < 300$

$\therefore$ Hay: $299 - 160 = 139$ fracciones

7 Halla los $\dfrac{3}{5}$ de los $\dfrac{5}{7}$ de 140.

Resolución:

Los $\dfrac{3}{5}$ de los $\dfrac{5}{7}$ de 140 es igual a:

$\dfrac{3}{5} \quad \times \quad \dfrac{5}{7} \times 140$

$= \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{7} \times 140 = 3 \times 20 = 60$

$\therefore$ Los $\dfrac{3}{5}$ de los $\dfrac{5}{7}$ de 140 es 60.

8 ¿Cuánto le falta a $\dfrac{2}{7}$ de $\dfrac{7}{9}$ para que sea equivalente a $\dfrac{3}{5}$ de $\dfrac{5}{6}$?

Resolución:

Sea x la cantidad que le falta a $\dfrac{2}{7}$ de $\dfrac{7}{9}$ para que sea equivalente a los $\dfrac{3}{5}$ de $\dfrac{5}{6}$.

Sabemos que los $\dfrac{2}{7}$ de $\dfrac{7}{9}$ se escribe: $\dfrac{2}{7} \times \dfrac{7}{9}$

Los $\dfrac{3}{5}$ de $\dfrac{5}{6}$ se escribe: $\dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{6}$

Entonces:

$x + \dfrac{2}{7} \times \dfrac{7}{9} = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad x + \dfrac{2}{9} = \dfrac{3}{6}$

$x = \dfrac{9 - 2 \times 2}{2 \times 9}$

$\therefore \; x = \dfrac{5}{18}$

9 Si $0,\widehat{mn} + 0,\overline{m0m0m0...} + 2 \times 0,\widehat{0n} = 1,\widehat{24} - 0,\widehat{m0}$; halla $m + n^2$.

Resolución:

En la expresión:

$$0,\widehat{mn} + 0,\overline{m0m0m0...} + 2 \times 0,\widehat{0n} = 1,\widehat{24} - 0,\widehat{m0}$$

$$0,\widehat{mn} + 0,\widehat{m0} + 2 \times 0,\widehat{0n} = 1,\widehat{24} - 0,\widehat{m0}$$

$$0,\widehat{mn} + 2 \times 0,\widehat{m0} + 2 \times 0,\widehat{0n} = 1,\widehat{24}$$

$$0,\widehat{mn} + 2 \times (0,\widehat{m0} + 0,\widehat{0n}) = 1 + \frac{24}{99}$$

$$\frac{\overline{mn}}{99} + 2 \times \left(\frac{\overline{mn}}{99}\right) = \frac{99 + 24}{99}$$

$$3 \times \frac{\overline{mn}}{99} = \frac{123}{99}$$

$$3 \times \overline{mn} = 123$$

$$\overline{mn} = 41$$

$$\Rightarrow m = 4 \wedge n = 1$$

Nos piden: $m + n^2 = 4 + 1^2 = 5$

10 De una mezcla en la que 24 L son agua y los otros 96 L son de leche, se extrae la mitad de la mezcla y se reemplaza por agua. Luego, del resto se extrae la tercera parte y se vuelve a reemplazar por agua. Finalmente, del nuevo resto se extrae la cuarta parte y se reemplaza por agua. ¿Cuánto de leche se extrajo en total?

Resolución:

Analizamos solo el volumen de la leche:

	Se retira	Queda
1.°	$\frac{1}{2} \times (96)$	$\frac{1}{2} \times (96)$
2.°	$\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (96)\right)$	$\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (96)\right)$
3.°	$\frac{1}{4} \times \left[\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}(96)\right)\right]$	$\frac{3}{4} \times \left[\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times (96)\right)\right]$

Entonces, al final quedarán: $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 96 = 24$ L de leche.

Luego, se extrajo en total: $96 - 24 = 72$ L de leche.

11 La mitad de lo que me queda de gaseosa en la botella es igual a la tercera parte de lo que ya me tomé. Si tomo la cuarta parte de lo que me queda, ¿qué fracción de toda la gaseosa me habré tomado en total?

Resolución:

Toma: x

Falta tomar: y

$x + y =$ Total

Por dato:

$$\frac{y}{2} = \frac{1}{3}x$$

$$\frac{x}{y} = \frac{3k}{2k}$$

Sea el total: 5k

Si tomo: $\frac{1}{4}y$

Piden:

$$\frac{x + \frac{1}{4}y}{x + y} = \frac{3k + \frac{2k}{4}}{5k} = \frac{7}{10}$$

12 Mariana va al mercado y gasta en verduras $\frac{1}{3}$ de lo que tiene, en cereales $\frac{1}{4}$ de lo que quedaba y $\frac{3}{8}$ del resto en frutas. Si aún le quedan S/.25, ¿cuánto gastó en total?

Resolución:

Sea x la cantidad de dinero que tiene Mariana.

Del enunciado:

- Gasta en verduras: $\frac{x}{3} \Rightarrow$ le queda: $\frac{2x}{3}$
- Gasta en cereales: $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{3}\right) \Rightarrow$ le queda: $\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{3}\right)$
- Gasta en frutas: $\frac{3}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{3}\right)\right) \Rightarrow$ le queda: $\frac{5}{8}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2x}{3}\right)\right)$

Por dato:

$$\frac{5}{8} \times \frac{3}{4} \times \frac{2x}{3} = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 80$$

Por lo tanto, en total gasta: $80 - 25 =$ S/.55.

13 De un tonel tiene 100 litros de vino, se retira $\frac{1}{4}$ del contenido y se reemplaza con agua; luego se saca $\frac{1}{4}$ de la mezcla y se reemplaza con agua. Si dicho proceso se realiza por tercera vez, ¿qué cantidad de vino queda en el tonel?

Resolución:

Se tiene: $\frac{1}{4}(100) = 25$

Entonces:

- Se retira: $25 \Rightarrow$ queda: 75
- Se retira: $\frac{1}{4}(75) \Rightarrow$ queda: $\frac{3}{4}(75)$
- Se retira: $\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}(75)\right) \Rightarrow$ queda: $\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}(75)\right)$

Luego; en el tonel quedan:

$$\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 75 = \frac{675}{16} = 42\frac{3}{16}\text{L}$$

14 Un tanque está lleno hasta las $\frac{3}{4}$ partes de su volumen. El caño A puede llenar todo el tanque en 12 minutos y el caño B puede desaguarlo en 8 minutos. Si ambos caños están abiertos, ¿cuánto tiempo emplearán en vaciar el tanque?

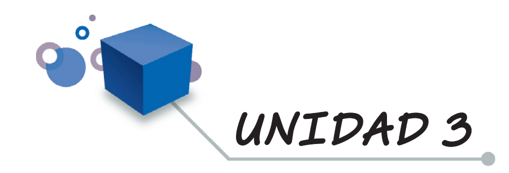
Resolución:

El caño A llena todo el tanque en 12 minutos, entonces en un minuto llenará $\frac{1}{12}$ del tanque. El caño B llena todo el tanque en 8 minutos, entonces en un minuto vaciará $\frac{1}{8}$ del tanque. Sea t el tiempo que tardará en llenarse las $\frac{3}{4}$ partes del tanque.

Luego:

$$t\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\frac{t}{24} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad t = 18 \text{ minutos}$$





UNIDAD 3

RAZONES Y PROPORCIONES

RAZÓN

Es la comparación de dos cantidades ya sea mediante una operación de división o sustracción.

Clases de razón

Aritmética	Geométrica
Es la comparación de dos cantidades mediante la sustracción. $A - B = R$ Donde: A: antecedente B: consecuente R: razón	Es la comparación de dos cantidades mediante la división. $\frac{A}{B} = k$ Donde: A: antecedente B: consecuente k: razón

Nota

Ejemplo:
La edad de Andrea es 12 años y la edad de José es 10 años, entonces:

- Razón aritmética = 12 – 10 = 2

  La edad de Andrea excede en 2 años a la edad de José.
- Razón geométrica = $\frac{12}{10} = \frac{6}{5}$

  Las edades de Andrea y José están en relación de 6 a 5.

PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones del mismo tipo, cuyo valor de la razón debe ser el mismo.

Clases de proporción

	Proporción aritmética	Proporción geométrica
Discreta	$a - b = c - d$; $(b \neq c)$ d: cuarta diferencial de a; b y c.	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$; $(b \neq c)$ d: cuarta proporcional de a; b y c.
Continua	$a - b = b - c$ b: media diferencial de a y c. $b = \frac{a+c}{2}$ c: tercera diferencial de a y b.	$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ b: media proporcional de a y c. $b = \sqrt{a \times c}$ c: tercera proporcional de a y b.



Atención

- Sea la proporción aritmética:

  $a - b = c - d$

  Donde:
  a y c: antecedentes
  b y d: consecuentes
  a y d: términos extremos
  b y c: términos medios

- Sea la proporción geométrica:

  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

  Donde:
  a y c: antecedentes
  b y d: consecuentes
  a y d: términos extremos
  b y c términos medios

SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES

Una serie de razones geométricas equivalentes se obtiene al igualar más de dos razones geométricas que tienen el mismo valor de la razón, es decir:

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \dots = \frac{P}{Q} = k$$

Donde k es el valor de la razón de cada una de las proporciones.

Propiedades

1. $\frac{A+C+E+\dots+P}{B+D+F+\dots+Q} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = \dots = \frac{P}{Q} = k$
2. $\frac{A \times C \times E \times \dots \times P}{B \times D \times F \times \dots \times Q} = k^n$; donde n es el número de razones equivalentes.

Nota

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se cumple:

1. $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ o $\frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$
2. $\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ o $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$
3. $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

Serie de razones geométricas equivalentes continuas

Una serie de razones geométricas equivalentes continuas es de la forma:

$$\frac{A}{B} = \frac{B}{C} = \frac{C}{D} = \frac{D}{E} = K$$

Donde:
$D = EK$
$C = DK = (EK)K = EK^2$
$B = CK = (EK^2)K = EK^3$
$A = BK = (EK^3) = EK^4$

Además:
$$\frac{A \times B \times C \times D}{B \times C \times D \times E} = \frac{A}{E} = K^4$$

Problemas resueltos

1 Sea r_1 la razón aritmética de 35 y 9; y r_2 la razón geométrica de 54 y 18. Calcula $r_1 \times r_2$.

Resolución:

Hallamos el valor de r_1:
$r_1 = 35 - 9 \Rightarrow r_1 = 26$

Hallamos el valor de r_2:
$r_2 = \frac{54}{18} \Rightarrow r_2 = 3$

Piden: $r_1 \times r_2 = 26 \times 3 = 78$

2 Halla la cuarta diferencial de 25; 8 y 41.

Resolución:

Sea x la cuarta diferencial, entonces:

$$25 - 8 = 41 - x$$
$$17 = 41 - x, \text{ de donde: } x = 24$$

3 Las edades de Manuel y Ricardo están en relación de 12 a 13 respectivamente. Si Manuel tiene 48 años, ¿cuántos años tiene Ricardo?

Resolución:

Sean:
Edad de Manuel: M
Edad de Ricardo: R
Del enunciado, se tiene: $\frac{M}{R} = \frac{12}{13}$

Además, la edad de Manuel es 48, entonces:
$\frac{48}{R} = \frac{12}{13} \Rightarrow R = 52$

4 En una fiesta la razón entre el número de varones y el número de mujeres es de 11 a 6. Si en total hay 102 personas, ¿cuántas mujeres hay?

Resolución:

Sean:
N.° de varones: V
N.° de mujeres: M
Por dato: $\frac{V}{M} = \frac{11k}{6k}$

Además: $V + M = 102$
$11k + 6k = 102$
$17k = 102$
$k = 6$
Piden: $M = 6k = 6(6) = 36$

5 En una veterinaria el número de perros excede al número de gatos en 100, y a su vez, estas cantidades están en la relación de a 8 a 3. ¿Cuántos animales hay en total?

Resolución:

Sean:
n.° perros: P $\wedge$ n.° gatos: G
Por dato: $\frac{P}{G} = \frac{8}{3} \Rightarrow \begin{matrix} P = 8k \\ G = 3k \end{matrix}$

$P - G = 100 \Rightarrow 8k - 3k = 100$
$5k = 100 \Rightarrow k = 20$

Piden la cantidad total de animales:
$P + G = 8k + 3k = 11k = 11(20) = 220$ animales

6 Si: $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \wedge c - a = 200$

Halla $N = b^2 + a \times c$.

Resolución:

Del enunciado: $a = 3k$; $b = 4k$; $c = 5k$
Además: $c - a = 200 \Rightarrow 5k - 3k = 200$
$2k = 200 \Rightarrow k = 100$

Reemplazamos:

$a = 3 . 100$	$b = 4 . 100$	$c = 5 . 100$
$a = 300$	$b = 400$	$c = 500$

Piden:
$N = (400)^2 + 300 \times 500 \Rightarrow N = 310\ 000$

7 La suma de los términos de una proporción aritmética continua es 100; si el producto de los 4 términos es 375 000, halla la diferencia de los extremos de la proporción.

Resolución:

Sea la proporción aritmética continua: $a - b = b - c$
Se cumple: $b = \frac{a + c}{2}$

Por dato:
$a . b . b . c = 375\ 000$ ... (1)
$a + 2b + c = 100$ ... (2)

De (2):
$2(a + c) = 100 \Rightarrow a + c = 50$ ... (3)

Luego: $b = 25$
En (1): $a . c . 25^2 = 375\ 000$
$a . c = 600$ ... (4)

De (3) y (4): $a = 30 \wedge c = 20$

Nos piden: $a - c = 10$

8 Si: $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{4} = 5 = \frac{z+1}{z}$. Halla: $z + x + y$

Resolución:

$\frac{x+1}{2} = 5 \Rightarrow x = 9$

$\frac{y+2}{4} = 5 \Rightarrow y = 18$

$\frac{z+1}{z} = 5 \Rightarrow z = \frac{1}{4}$

$\therefore x + y + z = \frac{109}{4}$

9 En una fiesta hay 500 personas, además por 7 varones hay 18 mujeres. ¿Cuántos varones deben llegar a la fiesta para que las cantidades de varones y mujeres sean iguales?

Resolución:

Sean:
n.° de varones: 7k   n.° de mujeres: 18k

Del enunciado:
$18k + 7k = 500 \Rightarrow k = 20$
$\Rightarrow$ n.° de varones: 140 $\wedge$ n.° de mujeres: 360

Sea x la cantidad de varones que deben llegar a la fiesta:
$\Rightarrow 140 + x = 360 \quad \therefore x = 220$



MAGNITUDES PROPORCIONALES

A

CONCEPTOS PREVIOS

Magnitud. Se llama magnitud a toda cualidad o característica susceptible de variar (aumentar o disminuir), como por ejemplo: la longitud, la masa, el tiempo, la temperatura, la rapidez, etc.
Cantidad. Es el resultado de la medición o cuantificación de la intensidad de una magnitud.

Ejemplo:

Magnitud	Longitud	Tiempo
Cantidad	10 metros	6 horas

RELACIONES ENTRE MAGNITUDES

Magnitudes directamente proporcionales (DP)

Dos magnitudes son directamente proporcionales, si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra también queda multiplicado por el mismo número.

Ejemplo:

×2 ×3 ×4

n.° de obreros	2	4	6	8
Obra	8	16	24	32

×2 ×3 ×4

Se observa que si el número de obreros es multiplicado por un número, el valor de la obra queda multiplicado también por dicho número. Por ello, podemos afirmar que el número de obreros y la obra son dos magnitudes directamente proporcionales, es decir:
(n.° de obreros) DP (Obra)

Además:

$$\frac{2}{8}=\frac{4}{16}=\frac{6}{24}=\frac{8}{32}=\boxed{\frac{1}{4}} \leftarrow \text{constante} \Rightarrow \boxed{\frac{\text{n.° de obreros}}{\text{Obra}}=\text{constante}}$$

Magnitudes inversamente proporcionales (IP)

Dos magnitudes son inversamente proporcionales, si al multiplicar el valor de una de ellas por un número, el valor correspondiente de la otra queda dividido por dicho valor.
Ejemplo:

×2 ×3 ×4

Rapidez (km/h)	10	20	30	40
Tiempo (h)	12	6	4	3

÷2 ÷3 ÷4

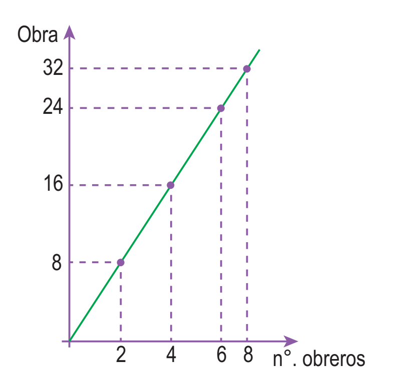
Se observa que si el valor de la rapidez es multiplicado por un número, el valor correspondiente al tiempo queda dividido por dicho número. Por ello, podemos afirmar que la rapidez y el tiempo son dos magnitudes inversamente proporcionales, es decir:
(Rapidez) IP (Tiempo)

Además:

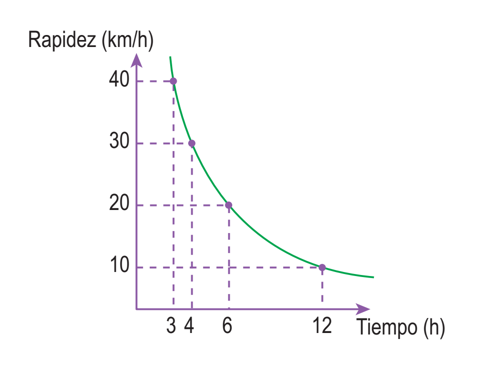
$$10\times 12=20\times 6=30\times 4=40\times 30=\boxed{120} \longleftarrow \text{constante} \Rightarrow \boxed{\text{Rapidez}\times\text{Tiempo}=\text{constante}}$$

Representación gráfica

Para dos magnitudes DP, es una línea recta. Para el ejemplo, se tiene:



Para dos magnitudes IP, es una línea curva. Para el ejemplo, se tiene:



Nota

- Dos magnitudes son **directamente proporcionales**, cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra también aumenta o disminuye, respectivamente, en la misma proporción.
- Dos magnitudes son **inversamente proporcionales**, cuando al aumentar o disminuir una de ellas, la otra magnitud disminuye o aumenta, respectivamente, en la misma proporción.



Atención

- Si las magnitudes A y B son directamente proporcionales, entonces se denota así:

  $A \ \alpha \ B$

- Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales, entonces se escribe:

  $A \frac{1}{\alpha} B$

  O también:

  $A \ \alpha \ \frac{1}{B}$



REPARTO PROPORCIONAL

El reparto proporcional es un procedimiento que consiste en dividir una cantidad en partes directamente o inversamente proporcionales a ciertos números denominados “índices de reparto” o “índices de proporcionalidad”.

Nota

Si A DP B cuando C es constante y A IP C cuando B es constante, entonces:

$\frac{A \times C}{B} = \text{cte.}$



Reparto proporcional simple directo

Veámoslo mediante un ejemplo.

Reparte S/.920 directamente proporcional a 5; 7 y 8.

Resolución:

Del enunciado, se quiere repartir S/.920 DP a 5; 7 y 8, es decir:

920 DP < 5, 7, 8 — Donde; 5; 7 y 8 son los indices de reparto

Sean las partes A; B y C, tal que $A + B + C = 920$

Para cada una de estas se cumple:

(Parte) DP (Índice)

Entonces:

$$\frac{\text{(Parte)}}{\text{(Índice)}} = \text{cte}.$$

Luego:

$$\frac{A}{5} = \frac{B}{7} = \frac{C}{8} = k$$

Utilizando las propiedades de las series de razones geométricas equivalentes, se tiene:

$$\frac{A+B+C}{5+7+8} = k \Rightarrow \frac{920}{20} = k \Rightarrow k = 46$$

Finalmente:

$A = 5k = 5(46) = 230$

$B = 7k = 7(46) = 322$

$C = 8k = 8(46) = 368$

Recuerda

Sea la serie de razones geométricas equivalentes:

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} = \frac{E}{F} = k$

Se cumple:

$\frac{A+C+E}{B+D+F} = k$



Reparto proporcional simple inverso

Analicémoslo mediante un ejemplo.

Reparte S/.792 inversamente proporcional a 8; 12 y 15.

Resolución:

Del enunciado, se quiere repartir S/.792 IP a 8; 12 y 15, es decir:

792 IP < 8, 12, 15 — Donde; 8; 12 y 15 son los indices de reparto.

Sean las partes M; N y P, tal que: $M + N + P = 792$

Para cada una de estas se cumple:

(Parte) IP (Índice)

Entonces:

(Parte) × (Índice) = cte.

Luego:

$8 \times M = 12 \times N = 15 \times P$

Hallamos el MCM(8; 12; 15) para luego aplicar:

$$\frac{8M}{120} = \frac{12N}{120} = \frac{15P}{120}$$

$$\frac{M}{15} = \frac{N}{10} = \frac{P}{8} = k$$

Ahora, empleamos algunas de las propiedades de las series de razones geométricas equivalentes:

$$\frac{M+N+P}{15+10+8} = k \Rightarrow \frac{792}{33} = k \Rightarrow k = 24$$

Finalmente:

$M = 15k = 15(24) = 360$

$N = 10k = 10(24) = 240$

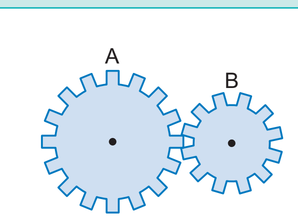
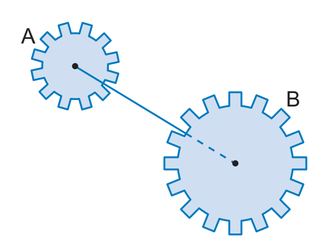
$P = 8k = 8(24) = 192$

APLICACIÓN DE MAGNITUDES PARA ENGRANAJES

Nota

Si una magnitud A es inversamente proporcional a otra magnitud B, entonces A será directamente proporcional a $\frac{1}{B}$; es decir:

$A \text{ IP } B \Rightarrow A \text{ DP } \frac{1}{B}$

Para dos ruedas engranadas	Para dos ruedas unidas por un eje común
 Se cumple: n.° dientes IP n.° vueltas, entonces: $D_A \times V_A = D_B \times V_B$ Donde: V_A: n.° vueltas de A — D_A: n.° dientes de A V_B: n.° vueltas de B — D_B: n.° dientes de B	 Se cumple: n.° vueltas de A = n.° vueltas de B

Problemas resueltos

A

1 Las magnitudes A y B son directamente proporcionales. Si cuando A = 10; B es 16, calcula el valor de B cuando A es 15.

Resolución:

Del enunciado: A DP B

Entonces:

$\frac{A}{B} = \text{cte.}$

Reemplazando, se tiene:

$\frac{10}{16} = \frac{15}{B}$

$B = \frac{15 \times 16}{10} \Rightarrow B = 24$

$\therefore$ Cuando A es 15, el valor de B es 24.

2 Martín, Roberto y Félix se reparten S/.1350 directamente proporcional a sus edades que son 28; 29 y 33, respectivamente. ¿Cuánto dinero le corresponde a Félix?

Resolución:

Se va a repartir S/.1350 de la siguiente manera:

$$1350 \text{ DP} \begin{cases} 28 \\ 29 \\ 33 \end{cases}$$

Sean M; R y F las cantidades de dinero que les corresponde a Martín, Roberto y Félix, respectivamente, entonces se cumple:

$\frac{M}{28} = \frac{R}{29} = \frac{F}{33} = k \Rightarrow \frac{M+R+F}{90} = k$

$\frac{1350}{90} = k \Rightarrow k = 15$

Luego:

M = 28k = 28(15) = 420

R = 29k = 29(15) = 435

F = 33k = 33(15) = 495

$\therefore$ A Félix le corresponde S/.495.

3 Si las magnitudes A y B son inversamente proporcionales, calcula: m + n + p

A	15	m	45	p
B	36	18	n	30

Resolución:

Del enunciado: A IP B

Entonces:

(Valor de A) $\times$ (Valor de B) = cte.

Luego:

$15 \times 36 = m \times 18 = 45 \times n = p \times 30$

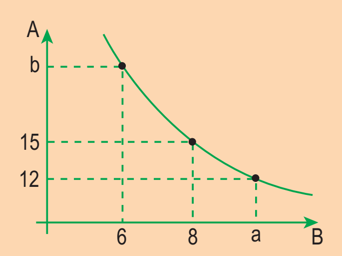
$\Rightarrow 18m = 45n = 30p = 540$

$m = \frac{540}{18} = 30;\ n = \frac{540}{45} = 12;\ p = \frac{540}{30} = 18$

Piden:

m + n + p = 30 + 12 + 18 = 60

4 En el gráfico mostrado, A y B son dos magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad. Calcula $a^2 + b^2$



Resolución:

De la figura, se observa: A IP B

Entonces:

(Valor A) IP (Valor B)

Reemplazando los valores, tenemos:

$b \times 6 = 15 \times 8 = 12 \times a$

$\Rightarrow a = 10;\ b = 20$

Piden:

$a^2 + b^2 = 10^2 + 20^2 = 500$

5 El precio de un diamante es proporcional al cubo de su peso. Si un diamante de 5 gramos cuesta S/.1500, ¿cuánto cuesta un diamante que pesa 7 gramos?

Resolución:

Del enunciado: (Precio) DP $(\text{Peso})^3$

Entonces:

$\frac{\text{Precio}}{(\text{Peso})^3} = \text{cte}.$

Con los datos del problema, se tiene:

$\frac{1500}{5^3} = \frac{\text{Precio}}{7^3}$

Precio = S/.4116

$\therefore$ El diamante de 7 gramos cuesta S/. 4116.

6 Se tienen 2 magnitudes A y B (IP). Cuando A aumenta 6 unidades, B varía en 20%, ¿cómo varía B, cuando A disminuye 4 unidades?

Resolución:

A . B = cte.

Tenemos:

$A_1 = a \wedge A_2 = a + 6$

$B_1 = b \wedge B_2 = b - 20\%b = 80\%b$

$B_2 = \frac{4}{5}b$

$\Rightarrow a \cdot b = (a+6)\left(\frac{4}{5}b\right) \Rightarrow a = 24$

Hallamos la variación de B, cuando A disminuye 4 unidades:

$24 \cdot b = 20 \cdot x \Rightarrow x = \frac{24.b}{20}$

En porcentaje: $x = 120\% \cdot b$

Por lo tanto, B aumenta 20%.

7 Una rueda de 36 dientes da 280 rpm y está engranada con un piñón que da 840 rpm. ¿Cuál es el número de dientes del piñón? (Nota: rpm es revoluciones por minuto)

Resolución:

En engranajes se cumple: (n.° dientes) IP (n.° vueltas)

Además: $D_1 N_1 = D_2 N_2$

Por dato: n.° $\text{dientes}_1 = D_1 = 36$

Nos piden: n.° $\text{dientes}_2 = D_2$

Entonces:

$36 \cdot 280 = D_2 \cdot 840 \Rightarrow D_2 = 12$

$\therefore$ El piñón tiene 12 dientes.

8 El número de cuadernos es directamente proporcional al número de resmas que tenga de papel y al número de obreros que trabajan. Si para hacer 100 cuadernos, se utilizaron 15 resmas y se emplearon 20 obreros, ¿cuántos obreros se emplearon para hacer 150 cuadernos con 18 resmas de papel?

Resolución:

Sean:

C: n.° cuaderno R: n.° resmas O: n.° obreros

Luego:

$$\frac{C}{R \cdot O} = k \Rightarrow \frac{100}{15 \cdot 20} = \frac{150}{O \cdot 18}$$

$$O = 25$$

$\therefore$ Se emplearon 25 obreros.

9 Dos ruedas de 30 y 55 dientes están engranadas, calcula el número de vueltas que habrá dado cada una al cabo de 4 minutos si una rueda ha dado 80 vueltas más que la otra por minuto.

Resolución:

Teniendo en cuenta que: n.° vueltas IP n.° dientes

Entonces:

$30 \cdot x = 55(x - 80)$

$30x = 55x - 4400$

$4400 = 25x \Rightarrow 176 = x$

Para la rueda de 30 dientes tenemos:

Si en un minuto hizo 176 vueltas en 4 minutos hará: $176 \times 4 = 704$.

Para la rueda de 55 dientes tenemos:

Si en un minuto hizo 96 vueltas en 4 minutos hará: $4 \times 96 = 384$.

10 Sabiendo que A es DP a C e IP a B. Halla A cuando B = 6 y C = 18; si cuando A = 36, B = 12 y C = 24.

Resolución:

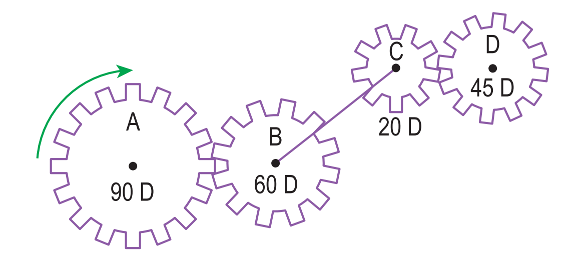
Del enunciado: $\frac{A \cdot B}{C} = k$ (constante)

Igualando condiciones:

$$\frac{A \cdot 6}{18} = \frac{36 \cdot 12}{24} \qquad \frac{A}{3} = 18 \Rightarrow A = 54$$

11 La rueda A tiene 90 dientes y engrana con otra B de 60 dientes. Fija al eje de B hay otra rueda C de 20 dientes que engrana con otra D de 45 dientes. Si A da 120 rpm, ¿cuántas revoluciones dará D en 4 minutos?

Resolución:



A y B (engranadas), luego:

$D_A \cdot V_A = D_B \cdot V_B$

$90 \cdot 120 = 60 \cdot V_B \Rightarrow V_B = 180$ rpm

Si las ruedas están unidas por el mismo eje, dan el mismo número de vueltas, entonces:

$V_B = V_C = 180$ rpm

C y D (engranadas), luego:

$D_C \cdot V_C = D_D \cdot V_D$

$20 \cdot 180 = 45 \cdot V_D \Rightarrow V_D = 80$ rpm

$\therefore$ En 4 minutos D dará: $80 \cdot 4 = 320$ revoluciones por minuto.

12 El peso de un disco varía proporcionalmente al cuadrado de su radio y también a su espesor. Se tienen dos discos cuyos espesores están en la relación de 9 a 8 y donde el peso del primero es el doble del peso segundo; se pide determinar la relación de sus radios.

Resolución:

Del enunciado:

$$\frac{\text{Peso}}{(\text{Radio})^2 \cdot (\text{Espesor})} = k \text{ (constante)}$$

Por dato:

$$\frac{\text{Espesor}(1)}{\text{Espesor}(2)} = \frac{9}{8} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Espesor (1)} = 9n \\ \text{Espesor (2)} = 8n \end{array}$$

Igualamos condiciones:

$$\frac{(2P_2)}{r_1^2 \cdot 9k} = \frac{P_2}{r_2^2 \cdot 8k}$$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{16}{9}$$

$$\therefore \frac{r_1}{r_2} = \frac{4}{3}$$



A

CONCEPTOS

La regla de tres es un procedimiento aritmético que permite calcular algún valor desconocido luego de comparar varias magnitudes.

REGLA DE TRES SIMPLE

Cuando en la comparación intervienen solo dos magnitudes. A su vez puede ser:

Directa

Si las magnitudes comparadas son directamente proporcionales.

Ejemplo:
Si 8 regalos cuestan S/.40, ¿cuánto costarán 11 regalos?

Resolución:
Se observa que a mayor número de regalos, mayor será el precio, es decir:

(Regalos) DP (precio)

Entonces:

n.° de regalos	Precio (S/.)
8	40
11	P

Se cumple:

$8 \times P = 11 \times 40 \Rightarrow P = \dfrac{40 \times 11}{8} = 55$

Por lo tanto, 11 regalos costarán S/.55.

Inversa

Si las magnitudes son inversamente proporcionales.

Ejemplo:
Si 2 empleados demoran 6 horas en ordenar una biblioteca, ¿cuánto se demorarán 3 empleados?

Resolución:
Se deduce que a mayor número de empleados, menor será el tiempo que tardarán en ordenar una biblioteca. Es decir:

(Empleados) IP (Tiempo)

Entonces:

n.° de empleados	Tiempo (horas)
2	6
3	T

Se cumple: $2 \times 6 = 3 \times T \Rightarrow T = \dfrac{2 \times 6}{3} = 4$

Por lo tanto, 3 empleados tardarán 4 horas en ordenar una biblioteca.

Atención

Un método práctico para resolver una regla de tres simple es el siguiente:

1. Si A DP B, entonces:

Magnitud A — Magnitud B

a_1 — b_1

a_2 — x

$\Rightarrow x = \dfrac{a_2 \times b_1}{a_1}$

2. Si A IP B, entonces:

Magnitud A — Magnitud B

a_1 — b_1

a_2 — x

$\Rightarrow x = \dfrac{a_1 \times b_1}{a_2}$



REGLA DE TRES COMPUESTA

Cuando en la comparación intervienen tres o más magnitudes. Para llevar a cabo dicho procedimiento, se compara la magnitud que contiene la incógnita con cada una de las restantes que intervienen en el problema y se observa si guardan relación directa o inversa.

Ejemplo:
Si para construir 600 m de acera, 12 obreros tardan 10 días, ¿cuánto tardarán 18 obreros para construir 1800 m?

Resolución:
Ordenamos las magnitudes y los valores:

Obra (m)	N.° de obreros	Tiempo (días)
600	12	10
1800	18	T

DP — IP

Al comparar la magnitud tiempo con cada una de las dos magnitudes, se tiene:

(Tiempo) DP (Obra) y (Tiempo) IP (Obreros)

Aplicamos la regla práctica:

$$\frac{10}{T} = \frac{600}{1800} \times \frac{18}{12} \Rightarrow T = \frac{10 \times 12 \times 1800}{18 \times 600}$$

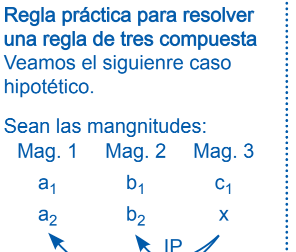
$$T = 20$$

Por lo tanto, 18 obreros tardarán 20 días para construir 1800 m de acera.

Nota

Regla práctica para resolver una regla de tres compuesta
Veamos el siguienre caso hipotético.

Sean las mangnitudes:



Mag. 1	Mag. 2	Mag. 3
a_1	b_1	c_1
a_2	b_2	x

Entonces

$\dfrac{c_1}{x} = \dfrac{a_1}{a_2} \times \dfrac{b_2}{b_1}$

Luego:

$x = \dfrac{c_1 . a_2 . b_1}{a_1 . b_2}$

Problemas resueltos

1 Si con 12 kilogramos de harina se obtienen 30 panes, ¿cuántos panes se obtendrán con 18 kilogramos de la misma harina?

Resolución:
Para obtener una mayor cantidad de panes se necesitará mayor cantidad de harina. Entonces:
(n.° de panes) DP (Harina)

Planteamos el esquema:

n.° de panes	Harina (kg)
30	12
P	18

Luego:
$$\frac{30}{12} = \frac{P}{18}$$
$$30 \times 18 = 12 \times P \Rightarrow P = \frac{30 \times 18}{12} = 45$$

Por lo tanto, con 18 kg de harina se obtendrán 45 panes.

2 Si 35 obreros hacen una obra en 42 días, ¿cuántos días demorarán 15 obreros en hacer la misma obra?

Resolución:
Si la cantidad de obreros aumenta, entonces la obra se terminará en menos tiempo, es decir:
(n.° de obreros) IP (n.° de días)

Planteamos el esquema:

n.° obreros	n.° de días
35	42
15	D

Luego:
$$35 \times 42 = 15 \times D$$
$$D = \frac{35 \times 42}{15} \Rightarrow D = 98$$
Por lo tanto, 15 obreros terminarán la misma obra en 98 días.

3 36 obreros pueden construir un muro en 50 días, trabajando 8 horas diarias. ¿Cuántos días emplearán 45 obreros para construir el mismo muro trabajando 10 horas diarias?

Resolución:
Al comparar la magnitud días con cada una de las otras dos magnitudes, se tiene:
(Días) IP (Obreros) (Días) IP (Horas diarias)

Planteamos el esquema:

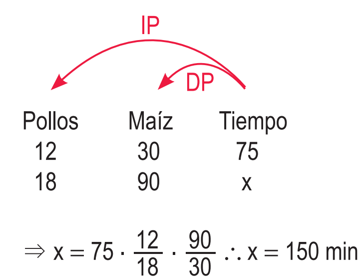
n.° obreros	n.° de días	h/d
36	50	8
45	D	10

Entonces:
$$D \times 45 \times 10 = 50 \times 36 \times 8$$
$$D = \frac{50 \times 36 \times 8}{45 \times 10} \Rightarrow D = 32$$

Por lo tanto, 45 obreros construirán un muro en 32 días trabajando 10 horas al día.

4 Si 12 pollos comen 30 kg de maíz en 75 minutos; ¿en cuánto tiempo 18 pollos comerán 90 kg de maíz?

Resolución:
Planteamos el esquema:



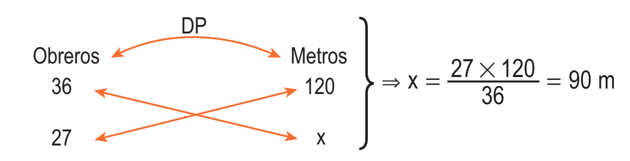
$$\Rightarrow x = 75 \cdot \frac{12}{18} \cdot \frac{90}{30} \therefore x = 150 \text{ min}$$

5 Si 36 obreros cavan 120 m de zanja diariamente, ¿cuál será el avance diario, cuando se ausenten 9 obreros?

Resolución:
Por dato, como se ausentan 9 obreros entonces quedan:

$36 - 9 = 27$ obreros

Planteamos el esquema:



$$\Rightarrow x = \frac{27 \times 120}{36} = 90 \text{ m}$$

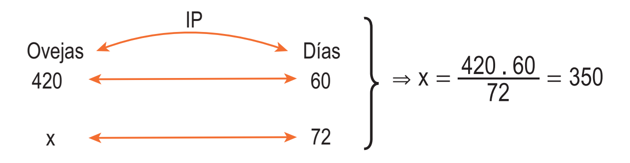
Por lo tanto, el avance diario será 90 m de zanja.

6 Se sabe que 420 ovejas tienen alimento para 60 días. Se desea que dicho alimento dure 12 días más sin cortarles la ración diaria. ¿Cuántas ovejas tiene que venderse?

Resolución:
Se desea que el alimento para las ovejas dure 12 días más sin reducirles la ración diaria, entonces:

$60 + 12 = 72$ días

Planteamos el esquema:



$$\Rightarrow x = \frac{420 \cdot 60}{72} = 350$$

Entonces, tiene que venderse: $420 - 350 = 70$ ovejas para no reducir la ración diaria.

A ◆ TANTO POR CIENTO

DEFINICIÓN

Se denomina tanto por ciento al número de partes que se toman en cuenta de una cierta cantidad que se ha dividido en 100 partes iguales.

> **Nota**
> < > se lee: "es equivalente a"

N <> 100 partes iguales a $\frac{N}{100}$

$\frac{N}{100}$	$\frac{N}{100}$	$\frac{N}{100}$	...	$\frac{N}{100}$	$\frac{N}{100}$	$\frac{N}{100}$	...	$\frac{N}{100}$	$\frac{N}{100}$

n partes

$$\text{n por ciento de N} <> \frac{n}{100}\text{N} = n\%\,\text{N}\;; \quad \text{donde } \frac{1}{100} <> \%$$

Ejemplos:

- 16 por ciento de 200.

100 partes iguales a $\frac{200}{100}$

$\frac{200}{100}$	$\frac{200}{100}$	$\frac{200}{100}$	...	$\frac{200}{100}$	$\frac{200}{100}$	...	$\frac{200}{100}$	$\frac{200}{100}$	$\frac{200}{100}$

16 partes

$$<> \frac{16}{100} \times 200 = 16\%(200) = 32$$

- 30 por ciento de 400.

100 partes iguales a $\frac{400}{100}$

$\frac{400}{100}$	$\frac{400}{100}$	$\frac{400}{100}$	...	$\frac{400}{100}$	$\frac{400}{100}$	...	$\frac{400}{100}$	$\frac{400}{100}$	$\frac{400}{100}$

30 partes

$$<> \frac{30}{100} \times 400 = 30\%(400) = 120$$

> **Ten en cuenta...**
> En algunos casos es necesario expresar el tanto por ciento como una fracción. Veamos algunas equivalencias:
> $50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
> $25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$
> $75\% = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$
> $20\% = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$



PORCENTAJE

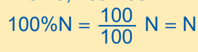
Se define como el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

Ejemplos:

- $20\%(600) = \frac{20}{100} \times 600 = 120 \Rightarrow \underbrace{20\%}_{\text{Tanto por ciento}}(600) = \underbrace{120}_{\text{Porcentaje}}$

- $32\%(1700) = \frac{32}{100} \times 1700 = 544 \Rightarrow \underbrace{32\%}_{\text{Tanto por ciento}}(1700) = \underbrace{544}_{\text{Porcentaje}}$

> **Observación**
> Todo número natural representa el 100% de sí mismo; veamos:
> $100\%\text{N} = \frac{100}{100}\text{N} = \text{N}$





Veamos más ejemplos de cálculo de porcentajes:

¿Cuál es el 8% de 9600?

9600 — 100%
x — 8%

$$x = \frac{9600 \times 8\%}{100\%} = 768$$

¿Qué porcentaje es 133 de 380?

380 — 100%
133 — x%

$$x = \frac{133 \times 100\%}{380} = 35\%$$

¿De qué cantidad es 520 su 65%?

520 — 65%
x — 100%

$$x = \frac{520 \times 100\%}{65\%} = 800$$

OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

Atención
Todo aumento o descuento sucesivo se hace tomando como referencia un todo (100%).



1. $a\%N + b\%N = (a + b)\%N$

   Caso especial: $a\% = 100\%$
   $N + b\%N = 100\%N + b\%N = (100 + b)\%N$

2. $a\%N - b\%N = (a - b)\%N$

   Caso especial: $a\% = 100\%$
   $N - b\%N = 100\%N - b\%N = (100 - b)\%N$

3. $a \times (b\%N) = (a \times b)\%N$

4. El a% del b% del c% de N es:
   $a\%b\%c\%N$

AUMENTOS Y DESCUENTOS SUCESIVOS

Aumentos sucesivos

Entendemos por aumentos sucesivos a aquellos aumentos que se van efectuando uno a continuación de otro, considerando como el nuevo 100% a la cantidad que se va formando.

Ejemplo:
Si el precio de un televisor es 240 dólares y sufre dos aumentos sucesivos del 20% y 25%, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución:

- Al realizar el 1.er aumento, se tendrá:

$$240 + 20\%(240) = (100 + 20)\%(240) = 120\%(240) = \frac{120}{100} \times 240 = 288$$

- Al realizar el 2.° aumento, se obtendrá:

$$288 + 25\%(288) = (100 + 25)\%(288) = 125\%(288) = \frac{125}{100} \times 288 = 360$$

Por lo tanto, el nuevo precio del televisor será 360 dólares.

Nota
Los tanto por ciento de un **aumento sucesivo** no se pueden sumar ya que no afectan a una misma cantidad.



Aumento único

Dos aumentos sucesivos del $a_1\%$ y $a_2\%$ equivalen a un aumento único de: $\left(a_1 + a_2 + \frac{a_1 \times a_2}{100}\right)\%$	En general, m aumentos sucesivos del $a_1\%$ $a_2\%$ ... ; $a_m\%$ equivalen a un aumento único de: $\left[\frac{(100 + a_1) \times (100 + a_2) \times ... \times (100 + a_m)}{100^{m-1}} - 100\right]\%$

Descuentos sucesivos

Entendemos por descuentos sucesivos a aquellos descuentos que se van efectuando uno a continuación de otro considerando como el nuevo 100% a la cantidad que va quedando.

Ejemplo:
Si al precio de una grabadora que cuesta 300 dólares se le hace dos descuentos sucesivos del 20% y 10%, ¿cuál será su nuevo precio?

Resolución:

- Al realizar el 1.er descuento, se tendrá:

$$300 - 20\%(300) = (100 - 20)\%(300) = 80\%(300) = \frac{80}{100} \times 300 = 240$$

- Al realizar el 2.° descuento, se obtendrá:

$$240 - 10\%(240) = (100 - 10)\% (240) = 90\%(240) = \frac{90}{100} \times 240 = 216$$

Por lo tanto, el nuevo precio de la grabadora será 216 dólares.

Nota
Los tanto por ciento de un **descuento sucesivo** no se pueden restar ya que no afectan a una misma cantidad.



Descuento único

Dos descuentos sucesivos del $d_1\%$ y $d_2\%$ equivalen a un descuento único de: $\left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 \times d_2}{100}\right)\%$	En general, m descuentos sucesivos del $d_1\%$; $d_2\%$; ... ; $d_m\%$, equivalen a un descuento único de: $\left[100 - \frac{(100 - d_1) \times (100 - d_2) \times ... \times (100 + d_m)}{100^{m-1}}\right]\%$

Problemas resueltos



1 Halla el 25% del 30% del 40% de 22 000.

Resolución:
Nos piden:

$$25\%30\%40\%(22\,000) = \frac{25}{100}\times\frac{30}{100}\times\frac{40}{100}\times 22\,000 = 660$$

2 Si el 25% del 20% de un número es 60, halla la mitad del número.

Resolución:
Sea x dicho número, entonces:

$$25\%\ 20\%\ x = 60$$

$$\frac{25}{100}\times\frac{20}{100}\cdot x = 60 \Rightarrow x = 1200$$

Nos piden: $\frac{x}{2} = \frac{1200}{2} = 600$

3 ¿De qué número es 384 el 4% menos?

Resolución:
Sea x el número, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ —— } 100\% \\ 384 \text{ —— } 100\% - 4\% = 96\% \end{array}\right\} \quad x = \frac{384\times 100\%}{96\%} \quad \therefore\ x = 400$$

4 Los descuentos sucesivos del 40% y 10% equivalen a un único descuento de:

Resolución:
Se tienen los descuentos sucesivos del 40% y 10%, entonces por propiedad:

$$\text{Descuento único} = \left(40 + 10 - \frac{40\times 10}{100}\right)\% = 46\%$$

5 Un colegio tiene en el nivel secundaria el 30% de sus alumnos, 180 alumnos en el nivel primaria y 25% de sus alumnos en el nivel inicial. ¿Cuántos alumnos tiene el colegio?

Resolución:
Sea T: total de alumnos del colegio

Por dato:
Cantidad de alumnos en el nivel secundaria = 20%T = 0,3T
Cantidad de alumnos en el nivel inicial = 0,5% T = 0,25 T
Cantidad de alumnos en el nivel primaria = 180

Entonces:

$$0{,}3T + 0{,}25T + 180 = T$$

$$0{,}55T + 180 = T$$

$$180 = 0{,}45T \Rightarrow T = 400 \text{ alumnos}$$

6 ¿Cuál es el importe de una factura cuyo descuento del 14% es 280 soles?

Resolución
Sea x el importe de la factura
Por dato: 14% del importe es 280 soles

Entonces: $\frac{14}{100}x = 280$

$$x = \frac{280\times 100}{14} \Rightarrow x = \text{S/. } 2000$$

7 Al sueldo de un empleado se le hace un aumento de 20% al comenzar el año y en el mes de julio un aumento de 10% sobre el total. ¿Qué porcentaje del sueldo del año anterior estará recibiendo en agosto?

Resolución:
Sea N el sueldo del año anterior.
1.^{er} aumento al comenzar el año: N + 20%N = 120%N
2.° aumento en julio: 120%N + 10% 120%N = 110% 120%N

Luego, en agosto recibe:

$$110\%\ 120\%N = \frac{110}{100}\times\frac{120}{100}\times N = 132\%N$$

Sea x el porcentaje del sueldo anterior que estará recibiendo en agosto:

$$\left.\begin{array}{l} N \text{ —— } 100\% \\ 132\%N \text{ —— } x \end{array}\right\} \quad x = \frac{132\%N\times 100\%}{N} = 132\%$$

Por lo tanto 132% es el porcentaje del sueldo del año anterior.

8 Si gastara el 30% del dinero que tengo y ganara el 28% de lo que me quedara, perdería S/.156. ¿Cuánto tengo?

Resolución:
Sea x el dinero que tengo.
Gasto: 30%x
Me queda: 70%x
Gano: 28%70%x = 19,6%x

Luego tendría:
70%x + 19,6%x = 89,6%x

Estaría perdiendo:

$$x - 89{,}6\%x = 156$$

$$\Rightarrow 10{,}4\%x = 156$$

$$\frac{10{,}4}{100}x = 156$$

$$x = 1500$$

∴ Tengo S/.1500.

9 A un número se le hacen 3 descuentos sucesivos del 25%; 20% y 20%; al número que resulta se le hacen tres incrementos sucesivos del 60%; 25% y 20%; resultando un número que se diferencia del original en 608 unidades. Halla el número original.

Resolución:
Sea N el número original.
Por dato, se le hacen tres descuentos del 25%; 20% y 20%, entonces se tiene:

$$75\%80\%80\%N = \frac{12}{25}N$$

Luego, a este número se le hacen tres incrementos sucesivos del 60%; 25% y 20%, entonces se tiene:

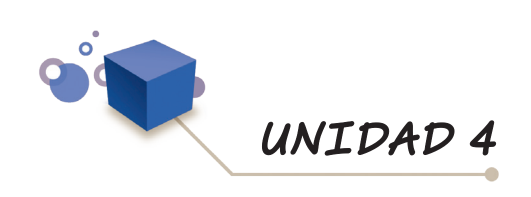
$$160\%125\%120\%\left(\frac{12}{25}N\right) = \frac{144}{125}N$$

Además:

$$\frac{144}{125}N - N = 608$$

$$\frac{19}{125} = 608$$

$$N = \frac{608\times 125}{19} \qquad \therefore\ N = 4000$$





PROMEDIOS

Observación

Sean los datos:
$a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n$
Si P es el promedio de dichos números, entonces se cumple:
$a_1 < P < a_n$



CONCEPTO

Se llama promedio a una cantidad representativa de un conjunto de datos que está comprendida entre el mayor y el menor de ellos.

PROMEDIOS IMPORTANTES

Promedio aritmético o media aritmética ($\overline{MA}$)	Promedio geométrico o media geométrica ($\overline{MG}$)	Promedio armónico o media armónica ($\overline{MH}$)
Se calcula de la siguiente manera: $\overline{MA} = \dfrac{\text{Suma de datos}}{\text{Cantidad de datos}}$ Ejemplo: Calcula la media aritmética de 2; 5; 9 y 12. $\overline{MA} = \dfrac{2+5+9+12}{4} = 7$	Su cálculo se realiza de la siguiente manera: $\overline{MG} = \sqrt[\text{Cantidad de datos}]{\left(\text{Producto de datos}\right)}$ Ejemplo: Calcula la media geométrica de 4; 6 y 9. $\overline{MG} = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 9} = 6$	Se calcula de la siguiente manera: $\overline{MH} = \dfrac{\text{Cantidad de datos}}{\text{Suma de las inversas de los datos}}$ Ejemplo: Halla la media armónica de 4; 6 y 8. $\overline{MH} = \dfrac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}} = \dfrac{3}{\frac{13}{24}} = \dfrac{72}{13}$

Propiedades de los promedios estudiados ($\overline{MA}$, $\overline{MG}$ y $\overline{MH}$)

Para un conjunto de dos o más datos

1. Si dichos datos son iguales, entonces la media aritmética, geométrica y armónica son iguales, es decir:

$$\overline{MA} = \overline{MG} = \overline{MH}$$

2. Si dichos datos son diferentes, entonces la media aritmética es mayor que la media geométrica y este a su vez es mayor que la media armónica; es decir:

$$\overline{MA} > \overline{MG} > \overline{MH}$$

Solo para dos datos

El producto de la media aritmética y la media armónica, es igual a la media geométrica elevada al cuadrado, es decir:

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = \overline{MG}^2$$

Ejemplo:
Para los números 9; 11 y 16, se tiene:

$$\overline{MA} = \frac{9+11+16}{3} = 12$$

$$\overline{MG} = \sqrt[3]{9 \times 11 \times 16} = 11{,}66$$

$$\overline{MH} = \frac{3}{\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{16}} = 11{,}34$$

Entonces:
$11{,}34 < 11{,}66 < 12$
Se verifica:

$$\overline{MH} < \overline{MG} < \overline{MA}$$

$\overline{MH}$ ↓ Menor promedio; $\overline{MA}$ ↓ Mayor promedio

Atención

Para dos números A y B se tiene:
- $\overline{MA} = \dfrac{A+B}{2}$
- $\overline{MG} = \sqrt{A \times B}$
- $\overline{MH} = \dfrac{2 \times A \times B}{A+B}$

EFECTUAR



1. Halla el menor promedio de 20 y 80.
2. Si el promedio de 2; x; 7 y 10 es 15, halla x.
3. Si la $\overline{MA}$ de dos números es 5 y la $\overline{MH}$ de los mismos es 3,2. Halla la $\overline{MG}$.
4. Si la $\overline{MG}$ de 2; m y 18 es 6, halla m.
5. Calcula el mayor de dos números cuyo promedio aritmético sea 5 y su promedio geométrico sea 4.
6. Si el promedio geométrico de 2^a; 2^3; 2 y 2^5 es 16, halla a.
7. El promedio aritmético de a; b y c es 31, siendo b el promedio geométrico de 2 y 72. Halla a + c.
8. Calcula el promedio armónico de 2; 3 y 6.

Problemas resueltos



1 Halla dos números sabiendo que su media aritmética es 5 y su media armónica es $\frac{24}{5}$.

Resolución:

Sean los números A y B; del enunciado se tiene:

$\overline{MA}(A; B) = 5 \quad \wedge \quad \overline{MH}(A; B) = \frac{24}{5}$

$\frac{A+B}{2} = 5 \quad \wedge \quad \frac{2\times A\times B}{A+B} = \frac{24}{5}$

$A + B = 10 \Rightarrow \frac{2\times A\times B}{10} = \frac{24}{5} \Rightarrow A\times B = 24$

Luego: $\left.\begin{matrix} A+B=10 \\ A\times B = 24\end{matrix}\right\} A = 6 \wedge B = 4$ $\quad \therefore$ Los números son 6 y 4.

2 La media armónica de dos números es 160 y su media geométrica es 200, ¿cuál es su media aritmética?

Resolución:

Se sabe que $(\overline{MG})^2 = (\overline{MA}) \times (\overline{MH})$ para dos cantidades.

Reemplazando: $(200)^2 = (\overline{MA})(160)$

$$\overline{MA} = \frac{40\,000}{160}$$

$\therefore \overline{MA} = 250$

3 La media geométrica de cuatro números naturales diferentes es $2\sqrt{2}$. Calcula la media aritmética de dichos números naturales.

Resolución:

Sean los números: a, b, c y d

Se tiene: $\sqrt[4]{a\times b\times c\times d} = 2\sqrt{2}$

$a\times b\times c\times d = 64$

Descomponiendo en cuatro factores diferentes:

$a\times b\times c\times d = 1\times 2\times 4\times 8$

$\Rightarrow$ a = 1; b = 2; c = 4; d = 8

Piden: $\overline{MA} = \frac{1+2+4+8}{4} = \frac{15}{4} = 3{,}75$

4 Si la suma de dos números enteros es 150 y su promedio armónico es 72, halla la diferencia de dichos números.

Resolución:

Sean los números a y b.

Del enunciado se tiene:

$a + b = 150$ ...(I)

$\overline{MH} = 72 \Rightarrow \frac{2\times a\times b}{a+b} = 72 \Rightarrow a\times b = \frac{72(a+b)}{2}$

$a\times b = 5400$ ...(II)

De (I) y (II): $a = 90 \quad \wedge \quad b = 60$

Piden: $a - b = 90 - 60 = 30$

5 El promedio aritmético de las edades de 4 hombres es 48. Si ninguno de ellos es menor de 45 años, ¿cuál es la edad máxima que podría tener uno de ellos?

Resolución:

Para que uno de ellos pueda tener la edad máxima, los otros deben tener la edad mínima, entonces 3 de ellos tendrían 45 años.
Si x es la edad máxima de uno de ellos, se tiene:

$\frac{45+45+45+x}{4} = 48$

$x = 48(4) - 135$

$\therefore x = 57$ años

6 Juan tiene un promedio de 14 puntos en cuatro exámenes, Si la segunda y la tercera nota son 10 y 13 respectivamente, ¿cuál es la primera nota si esta excede a la última en 3,2?

Resolución:

Sea x la primera nota; del enunciado se tiene:

$\frac{x+10+13+(x-3{,}2)}{4} = 14$

$2x + 23 - 3{,}2 = (14)(4)$

$2x + 19{,}8 = 56$

$2x = 36{,}2 \Rightarrow x = 18{,}1$

7 El promedio geométrico de 3 números es 6 y su promedio armónico es 108/19. Si uno de ellos es 9, halla la media aritmética de los otros dos.

Resolución:

Sean a, b y c los números; del enunciado:

$\overline{MG} = \sqrt[3]{abc} = 6$ ...(1)

$\overline{MH} = \frac{3abc}{ab+bc+ac} = \frac{108}{19}$

Como uno de ellos es 9; sea a = 9: $\frac{27bc}{9b+bc+9c} = \frac{108}{19}$ ...(2)

Además de (1) tenemos: $9bc = 6^3 \Rightarrow bc = 24$

Reemplazamos bc = 24 en (2): $\frac{27(24)}{9b+24+9c} = \frac{108}{19}$

$90 = 9(c+b) \Rightarrow 10 = c + b$

Nos piden hallar la media aritmética de c y b:

$\therefore \overline{MA}(c; b) = \frac{c+b}{2} = \frac{10}{2} = 5$

8 El promedio aritmético de 3 números es 3/2. La relación entre el 1.^er^ y 2.° número es de 1 a 2 y la relación entre el 2.° y 3.^er^ número es de 1 a 3. El producto de dichos números es:

Resolución:

$\overline{MA} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow a+b+c = \frac{9}{2}$ ...(1)

Además: $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}; \frac{b}{c} = \frac{1}{3}$

Entonces: a = t; b = 2t; c = 6t

Reemplazando en (1): $a + b + c = 9t = \frac{9}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\therefore a\times b\times c = 12t^3 = 12 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$

ESTADÍSTICA



Nota

Debes tener en cuenta que una variable estadística es una característica de la población que interesa al investigador.



Observación

Una variable cuantitativa se obtiene como resultado de mediciones o conteos.



CONCEPTO

La estadística es la ciencia que nos proporciona un conjunto de métodos y procedimientos para la recolección, clasificación, análisis e interpretación de datos en forma adecuada para la toma de decisiones cuando prevalecen condiciones de incertidumbre.

CONCEPTOS EMPLEADOS EN ESTADÍSTICA

Población

Es el conjunto sobre el que estamos interesados en obtener conclusiones. Normalmente es demasiado grande para poder abarcarlo.

Ejemplo:
Población de estaturas de todos los alumnos del nivel primario de todas las I. E. del departamento de Arequipa.

Muestra

Es un subconjunto de la población al que tenemos acceso y sobre el que realmente hacemos las observaciones.

Ejemplo:
Muestra de estaturas de los alumnos del nivel primario de una determinada I. E. del departamento de Arequipa.

Variables estadísticas

Una variable es una característica observable que varía entre los diferentes individuos de una población. La información que disponemos de cada individuo es resumida en variables.

Clasificación

1. Variable cualitativa

Son aquellas variables cuyos valores de las observaciones quedan expresados por características o cualidades de la población. A su vez se clasifica en:

- **Variable cualitativa nominal.** Cuando se definen categorías y no llevan ninguna ordenación en las posibles modalidades.

  Ejemplos:
  Estado civil, color preferido, partidos políticos, etc.

- **Variable cualitativa ordinal.** Cuando más allá de la clasificación, se busca ordenar los casos en términos del grado que poseen cada característica.

  Ejemplos:
  Nivel de educación alcanzado, nivel socioeconómico, etc.

2. Variable cuantitativa

Son aquellas variables que toman valores numéricos (cuantificables) y, en consecuencia, son ordenables. A su vez las variables cuantitativas se subdividen en dos tipos:

- **Variables discretas.** Son aquellas variables que se obtienen por el procedimiento de conteo (toman valores naturales).

  Ejemplo:
  Número de hijos, número de monedas que una persona lleva en el bolsillo, etc.

- **Variables continuas.** Son aquellas variables que pueden tomar cualquier valor de un cierto intervalo (entre dos números fijados).

  Ejemplo:
  Peso, estatura, temperatura, etc.

PRESENTACIÓN DE DATOS

Hay dos formas de presentar los datos estadísticos:

1. En forma tabular: cuadros y tablas de frecuencia.
2. Mediante gráficos y diagramas.



Cuadro estadístico

Consta de ocho partes: número de cuadro, título, concepto o encabezamiento, cuerpo del cuadro, nota de pie de página o llamadas, fuente, nota de unidad de medida y elaboración.

Ejemplo:

CUADRO 1
Errores de focalización de los principales programas sociales: Perú, 2000-2011

	2000	2002	2003	2004	2006	2007	2008	2009	2010	2011
FILTRACIONES										
Seguro Integral de Salud	39,4%	23,5%	27,1%	24,3%	28,2%	31,6%	39,7%	41,7%	44,8%	49,2%
Desayunos y almuerzos escolares	29,0%	19,9%	26,9%	26,1%	27,3%	35,5%	42,2%	49,0%	45,1%*	48,4%*
Vaso de Leche	19,1%	39,4%	39,6%	37,6%	37,1%	43,6%	47,6%	51,0%	59,5%	60,5%
Comedores Populares	34,8%	31,0%	35,2%	36,8%	41,5%	46,2%	48,6%	48,1%	54,7%	53,7%
SUBCOBERTURA										
Seguro Integral de Salud	–	70,3%	69,7%	75,2%	71,7%	66,0%	45,8%	34,1%	34,5%	33,5%
Desayunos y almuerzos escolares	33,5%	68,3%	64,5%	63,8%	72,4%	55,2%	61,5%	51,2%	74,4%*	77,2%*
Vaso de Leche	73,7%	72,7%	70,0%	69,2%	73,3%	73,3%	75,0%	76,3%	71,0%	72,9%
Comedores Populares	93,6%	96,3%	96,4%	96,9%	97,6%	97,7%	97,1%	97,5%	97,3%	97,8%

Fuente: ENAHO - INEI.
Elaboración: Centro de Investigación de la Universidad del Pacífico.
* Solo toma en cuenta el Programa de Desayunos Escolares.

Recuerda

Fundamentalmente se usa la forma tabular, los gráficos se utilizan complementariamente para ilustrar mediante figuras, el comportamiento de las variables.





Tablas estadísticas

Llamadas también tablas de frecuencia o de distribución. Son tablas de trabajo estadístico que presentan la distribución de un conjunto de elementos agrupados o clasificados en las diversas categorías o variables.

Elementos

Rango (R). Llamado también recorrido de datos, es la diferencia entre el mayor y menor de los valores que forman las variables estadísticas.

$$R = X_{máx.} - X_{mín.}$$

Frecuencia absoluta (f_i). Es el número de veces que aparece repetida la variable estadística en el conjunto de observaciones realizadas.

Frecuencia relativa (h_i). Es el cociente entre la frecuencia absoluta de un dato y el número de observaciones realizadas.

Frecuencia absoluta acumulada (F_i). Resulta de acumular sucesivamente las correspondientes frecuencias absolutas.

Frecuencia relativa acumulada (H_i). Resulta de acumular sucesivamente las frecuencias relativas.

Observación

De la tabla de frecuencias:

X_i	f_i	F_i	h_i	H_i
X_1	f_1	F_1	h_1	H_1
X_2	f_2	F_2	h_2	H_2
X_3	f_3	F_3	h_3	H_3
X_4	f_4	F_4	h_4	H_4
	n			

Se cumple:
- $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = n$
- $h_1 = \frac{f_1}{n}; h_2 = \frac{f_2}{n}; h_3 = \frac{f_3}{n}; h_4 = \frac{f_4}{n}$
- $h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$
- $F_1 = f_1$
  $F_2 = f_1 + f_2 = F_1 + f_2$
  $F_3 = f_1 + f_2 + f_3 = F_2 + f_3$
  $F_4 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = F_3 + f_4$
- $H_1 = h_1$
  $H_2 = h_1 + h_2 = H_1 + h_2$
  $H_3 = h_1 + h_2 + h_3 = H_2 + h_3$
  $H_4 = h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = H_3 + h_4$

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUANTITATIVAS

Una vez que se han recopilado los datos, denotaremos la variable por X y los datos por X_1; X_2; ...; X_n, donde n es el número de observaciones realizadas.

En general, para construir una tabla de frecuencia, se debe llevar a cabo dos procedimientos que son: **la clasificación**, que consiste en determinar los valores que toman las variables o intervalos de clase y **la tabulación**, que consiste en distribuir los elementos.

Tablas de frecuencia de variables discretas

Ejemplo:

Los siguientes datos corresponden a las alturas (en cm) de 20 plantas en la clase de Botánica.

61	67	67	70	69	69	70	67	60	61
60	61	61	69	69	70	67	67	67	69

Nota

Los distintos valores que toma la variable X_i son 5: 60; 61; 67; 69 y 70.



n.° de observaciones: n = 20
Variable: X_i = altura de las plantas
Datos:

$X_1 = 61$ $X_2 = 67$ $X_3 = 67$ $X_4 = 70$ $X_5 = 69$ $X_6 = 69$ $X_7 = 70$ $X_8 = 67$ $X_9 = 60$ $X_{10} = 61$
$X_{11} = 60$ $X_{12} = 61$ $X_{13} = 61$ $X_{14} = 69$ $X_{15} = 69$ $X_{16} = 70$ $X_{17} = 67$ $X_{18} = 67$ $X_{19} = 67$ $X_{20} = 69$

Observación

La tabla de frecuencias:

X_i	f_i
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
X_4	f_4
X_5	f_5

es simétrica si:
$f_1 = f_5 \wedge f_2 = f_4$

Clasificación:
X_i: 60; 61; 67; 69; 70 $X_{mín.} = 60$ $X_{máx.} = 70$

Tabulación:

CUADRO 2
Distribución de las alturas de 20 plantas en una clase de Botánica

Altura de las plantas (X_i)	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
60	II	2	2	0,10	0,10
61	IIII	4	6	0,20	0,30
67	~~IIII~~ I	6	12	0,30	0,60
69	~~IIII~~	5	17	0,25	0,85
70	III	3	20	0,15	1
		n = 20		1	



Tablas de frecuencia de variables continuas

Ejemplo:
Los siguientes datos corresponden a las remuneraciones diarias de 40 obreros.

70	82	68	70	72	67	63	80
77	85	94	70	77	73	93	58
76	67	52	68	69	66	72	86
57	70	59	67	57	54	77	56
67	46	67	63	60	84	61	74

Atención

Cuando los datos toman valores racionales, se acostumbra presentarlos utilizando **intervalos de clase** en las tablas de frecuencia.

n.° de observaciones: n = 40
Variable: X_i = remuneraciones diarias

Clasificación:
Es este caso se formarán intervalos, tomando en cuenta el siguiente procedimiento:

1. Determinamos el valor máximo y mínimo de X_i para luego hallar el rango o recorrido.
   $X_{mín.} = 46$; $X_{máx.} = 94 \Rightarrow R = 94 - 46 = 48$

2. Elegimos el número de intervalos (K), que convenientemente debe estar entre 5 y 20. Podemos emplear dos métodos para hallar el valor de K:
   a) Si $n < 25$, entonces $K = 5$ y si $n \geq 25$, entonces $K = \sqrt{n}$
   b) Regla de Sturges: $K = 1 + 3{,}32 \times \log(n)$

   En el ejemplo:
   $K = 1 + 3{,}32 \times \log(40) = 1 + 3{,}32(1{,}60) = 6{,}32 \Rightarrow K = 6$ intervalos

Nota

El número de intervalos (K) es arbitrario, sin embargo es recomendable tener en cuenta ciertos criterios:
– Naturaleza de la variable.
– Número de valores observados.
– El recorrido de la variable.
– Unidad de medida de la variable.
– Los objetivos del estudio.

3. Determinamos la amplitud de los intervalos (c) de la siguiente manera:
   $$c = \frac{X_{máx.} - X_{mín.}}{K}$$
   Para el ejemplo:
   $$c = \frac{94 - 46}{6} = \frac{48}{6} = 8$$

4. Construimos los intervalos:

$[L_i ; L_s\rangle$
$[46; 54\rangle$
$[54; 62\rangle$
$[62; 70\rangle$
$[70; 78\rangle$
$[78; 86\rangle$
$[86; 94]$



Se calcula el punto medio de cada intervalo, llamado **marca de clase** (x_i), para finalmente organizarlas en una tabla.

$$x_1 = \frac{46+54}{2} = 50$$
$$x_2 = \frac{54+62}{2} = 58$$
$$x_3 = \frac{62+70}{2} = 66$$
$$x_4 = \frac{70+78}{2} = 74$$
$$x_5 = \frac{78+86}{2} = 82$$
$$x_6 = \frac{86+94}{2} = 90$$

$[L_i ; L_s\rangle$	x_i
$[46; 54\rangle$	50
$[54; 62\rangle$	58
$[62; 70\rangle$	66
$[70; 78\rangle$	74
$[78; 86\rangle$	82
$[86; 94]$	90

Ten en cuenta

La marca de clase x_i, es el punto medio de cada intervalo.



Tabulación:

CUADRO 3
Distribución de las remuneraciones diarias de 40 obreros

$[L_i ; L_s\rangle$	x_i	Conteo	f_i	F_i	h_i	H_i
$[46; 54\rangle$	50	II	2	2	0,050	0,050
$[54; 62\rangle$	58	~~IIII~~ III	8	10	0,200	0,250
$[62; 70\rangle$	66	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11	21	0,275	0,525
$[70; 78\rangle$	74	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12	33	0,300	0,825
$[78; 86\rangle$	82	IIII	4	37	0,100	0,925
$[86; 94]$	90	III	3	40	0,075	1
			n = 40		1	

Nota

En la tabulación se contabilizan cuántos elementos se encuentran comprendidos en cada intervalo.

TABLAS DE FRECUENCIA PARA VARIABLES CUALITATIVAS

En el caso de variables cualitativas no se pueden calcular las frecuencias acumuladas pues no es posible ordenar de menor a mayor datos no numéricos.

Ejemplo:
Los siguientes datos corresponden a las especialidades de 40 estudiantes universitarios encuestados.

A	A	D	C	C	E	E	C	D	A
C	D	E	E	A	C	D	A	A	D
D	A	D	D	D	A	C	C	A	D
C	C	E	E	D	C	D	D	D	C

Donde:
A: Administración C: Contabilidad D: Derecho E: Economía

Como resultado de la tabulación y clasificación se tiene:

CUADRO 4
Distribución de las especialidades de 40 estudiantes universitarios encuestados

Especialidad	f_i	h_i
Administración	9	0,225
Contabilidad	11	0,275
Derecho	14	0,350
Economía	6	0,150
	n = 40	1

Atención

En el cuadro 3 se observa que:
$F_6 = 40$

En general: $F_k = n$

También: $H_6 = 1$

Se cumple en general que: $H_k = 1$



REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Un gráfico estadístico es la representación de un fenómeno estadístico por medio de figuras geométricas, cuyas dimensiones son proporcionales a la magnitud de los datos representados.

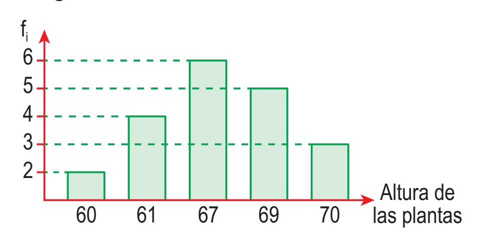
Atención

Un gráfico es un auxiliar de un cuadro estadístico, no lo sustituye sino que lo complementa.



Representación gráfica de variables cuantitativas

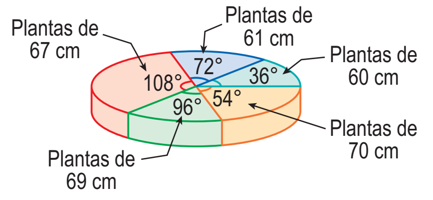
Diagrama de barras



Histograma

f_i
12
11
8
4
3
2
46 54 62 70 78 86 94
Remuneraciones diarias

Diagrama circular



Para las plantas que miden 60 cm, se tiene:

$$x = \frac{2 \times 360°}{20} \Rightarrow x = 36°$$

Pictograma

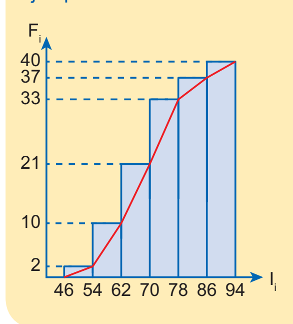


Recuerda

Para variables discretas se usan:
- Diagrama de barras
- Diagrama circular
- Pictograma

Para variables continuas se usan:
- Histograma
- Ojiva de datos

Esta última se gráfica para el ejemplo del cuadro 3:





Representación gráfica de variables cualitativas

Diagrama de barras

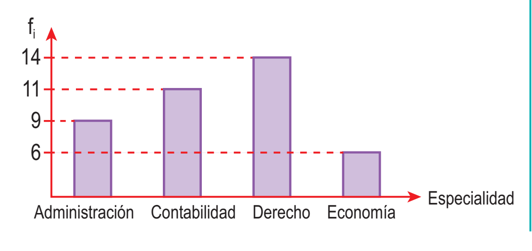
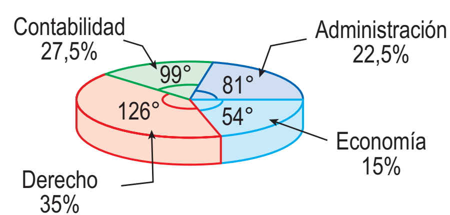


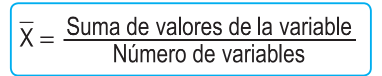
Diagrama circular



MEDIDAS DE POSICIÓN

Media aritmética ($\overline{X}$)

La media aritmética, llamada también media o simplemente promedio, se calcula dividiendo la suma de los valores de la variable entre el número de observaciones o valores. Es decir:



$$\overline{X} = \frac{\text{Suma de valores de la variable}}{\text{Número de variables}}$$

Mediana (Me)

Sean X_1, X_2, X_3, ..., X_n los valores de la variable X, ordenados de menor a mayor, donde n es el número de observaciones. Entonces:

- Si n es par, se tiene: $Me = \dfrac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$
- Si n es impar, se tiene: $Me = X_{\frac{n+1}{2}}$

Observación

La moda no siempre existe y no siempre es única.

Moda (Mo)

Dada una distribución de frecuencias; la moda es el valor de la variable que tiene la más alta frecuencia.

Problemas resueltos

1 Se tienen los promedios finales de 10 estudiantes en el curso de Matemática Básica I.

10,2	10,5	11,2	13	14
16,2	13,7	12	10,9	13,1

Si se clasifican los datos en 4 intervalos de clase, halla $f_3 + F_2 + h_1$.

Resolución:

Identificamos: $X_{mín.} = 10,2;\ x_{máx.} = 16,2$

Hallamos el rango: $R = 16,2 - 10,2 = 6$

Calculamos la amplitud de cada intervalo para $K = 4$:

$$c = \frac{R}{K} = \frac{6}{4} = 1,5$$

Tabulamos los datos y construimos la tabla de frecuencia:

I_i	Conteo	f_i	F_i	h_i
[10,2; 11,7⟩	||||	4	4	0,4
[11,7; 13,2⟩	|||	3	7	0,3
[13,2; 14,7⟩	||	2	9	0,2
[14,7; 16,2]	|	1	10	0,1

Piden: $f_3 + F_2 + h_1 = 2 + 7 + 0,4 = 9,4$

2 Del siguiente cuadro de frecuencias:

I_i	f_i	h_i
[100; 200⟩		6/a
[200; 300⟩	6	3/a
[300; 400⟩		2/a
[400; 500]		1/a

Calcula $F_3 + f_2 + h_1$.

Resolución:

Por propiedad, se cumple:

$h_1 + h_2 + h_3 + h_4 = 1$

$\frac{6}{a} + \frac{3}{a} + \frac{2}{a} + \frac{1}{a} = 1$

$\frac{12}{a} = 1 \Rightarrow a = 12$

Sea n el número de observaciones, entonces:

- $h_2 = \frac{f_2}{n}$

  $\frac{3}{12} = \frac{6}{n}$

  $\Rightarrow n = 24$

$f_1 = n \times h_1 = 24 \times \frac{6}{12} = 12$

$f_3 = n \times h_3 = 24 \times \frac{2}{12} = 4$

$f_4 = n \times h_4 = 24 \times \frac{1}{12} = 2$

Completamos la tabla:

I_i	f_i	h_i	F_i
[100; 200⟩	12	0,50	12
[200; 300⟩	6	0,25	18
[300; 400⟩	4	0,17	22
[400; 500]	2	0,08	24

Piden: $F_3 + f_2 + h_1 = 22 + 6 + 0,5 = 28,5$

3 Se tiene la distribución de las estaturas en metros de 100 alumnos del 1.^{er}; 2.° y 3.^{er} año de secundaria de una I. E.

I_i	F_i	H_i
[1,40; 1,45⟩		0,14
[1,45; 1,50⟩	37	
[1,50; 1,55⟩		0,62
[1,55; 1,60⟩	84	
[1,60; 1,65]		

¿Cuántos alumnos tienen una estatura mayor o igual que 1,45 m y menor que 1,60 m?

Resolución:

De la tabla:

$$\frac{f_1}{100} = h_1 = H_1 = 0,14 \ \wedge \ H_3 = \frac{F_3}{100} = 0,62$$

$\Rightarrow f_1 = 14$ $\qquad \Rightarrow F_3 = 62$

Entonces:
$f_2 = F_2 - f_1$
$f_2 = 37 - 14$
$f_2 = 23$

También:
$f_3 = F_3 - F_2$
$f_3 = 62 - 37$
$f_3 = 25$

Luego:
$f_4 = F_4 - F_3$
$f_4 = 84 - 62$
$f_4 = 22$

Finalmente:
$f_5 = 100 - F_4$
$f_5 = 100 - 84$
$f_5 = 16$

Completamos la tabla de frecuencia:

I_i	f_i	F_i
[1,40; 1,45⟩	14	14
[1,45; 1,50⟩	23	37
[1,50; 1,55⟩	25	62
[1,55; 1,60⟩	22	84
[1,60; 1,65]	16	100

Nos piden:
$f_2 + f_3 + f_4 = 23 + 25 + 22 = 70$

$\therefore$ 70 alumnos tienen una estatura mayor o igual que 1,45 m y menor que 1,60 m.

4 Del problema 3, ¿cuántos alumnos miden más de 1,55 m de estatura?

Resolución:

Piden:
$f_4 + f_5 = 22 + 16 = 38$

$\therefore$ 38 alumnos miden más de 1,55 m de estatura.

5 De los siguientes datos:

24	22	21	21	24	23	22	26	23	22
21	23	22	23	23	26	23	26	26	26

Halla la media.

Resolución:

Primero ordenamos los datos en forma ascendente:

21 21 21 22 22 22 22 23 23 23
23 23 23 24 24 26 26 26 26 26

Estos datos los podemos ubicar en una tabla de frecuencias:

X_i	f_i
21	3
22	4
23	6
24	2
26	5
	n = 20

Nos piden:

$$\overline{X} = \frac{21 \times 3 + 22 \times 4 + 23 \times 6 + 24 \times 2 + 26 \times 5}{20} = 23,35$$

6 Del problema 5, calcula Me + Mo.

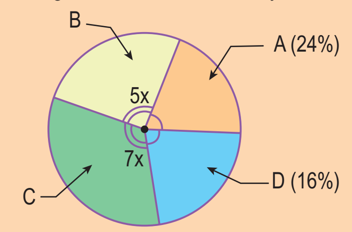
Resolución:

Al observar la tabla de distribución, se tiene:

- $Me = \frac{23 + 23}{2} = 23$
- $Mo = 23$

Piden: $Me + Mo = 23 + 23 = 46$

7 En el diagrama circular se muestra las preferencias de un grupo de personas por los lugares turísticos A, B, C y D.



Halla x.

Resolución:

Hay que tener en cuenta que en un diagrama circular, el ángulo correspondiente a un sector se calcula así:

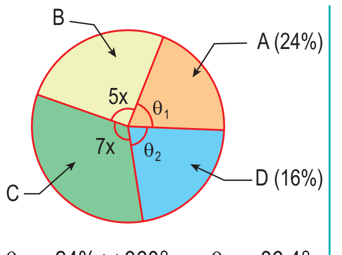
$$\theta_i = \frac{f_i}{n} \times 360°$$

Luego: $\theta_i = h_i \times 360°$

También:

$\theta_i = h_i \times 100\% \times 360° \ \wedge \ h_i \times 100\% = \frac{\theta_i}{360°}$

En el gráfico del enunciado:



$\theta_1 = 24\% \times 360° \Rightarrow \theta_1 = 86,4°$

$\theta_2 = 16\% \times 360° \Rightarrow \theta_2 = 57,6°$

Luego:

$\theta_1 + \theta_2 + 12x = 360°$

$86,4° + 57,6° + 12x = 360°$

$144° + 12x = 360°$

$12x = 216°$

$x = 18°$

8 Del problema 7, ¿qué porcentaje de las personas prefieren el lugar turístico B?

Resolución:

Sea b el porcentaje de las personas que prefieren el lugar turístico B.

Del gráfico.

$b = \frac{5x}{360°}$

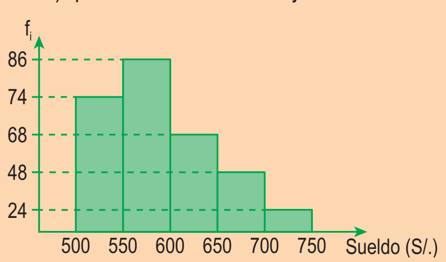
$b = \frac{5(18°)}{360°}$

$b = 0,25$

$b = 25\%$

∴ El 25% de las personas prefieren el lugar turístico B.

9 Se tiene el histograma de la distribución de frecuencias de los sueldos (en S/.) quincenales de los trabajadores de una empresa.



¿Cuántos trabajadores tiene dicha empresa?

Resolución:

Construimos la tabla de frecuencias a partir del histograma:

I_i	f_i
[500; 550⟩	74
[550; 600⟩	86
[600; 650⟩	68
[650; 700⟩	48
[700; 750]	24
Total	300

∴ Dicha empresa tiene 300 trabajadores.

10 De la pregunta 9, ¿cuántos trabajadores ganan entre S/.600 y S/.700?

Resolución:

Piden: $f_3 + f_4 = 68 + 48 = 116$

∴ 116 trabajadores ganan entre S/.600 y S/.700.



ANÁLISIS COMBINATORIO

A

CONCEPTO

El análisis combinatorio tiene como objetivo desarrollar métodos que permitan contar el número de elementos de un conjunto, siendo estos elementos, agrupamientos formados bajo ciertas condiciones.

Ejemplo:
Sea A el conjunto de los números de dos cifras distintas formado a partir de los dígitos 1; 2 y 3, entonces:

$A = \{12; 13; 21; 23; 31; 32\} \Rightarrow n(A) = 6$

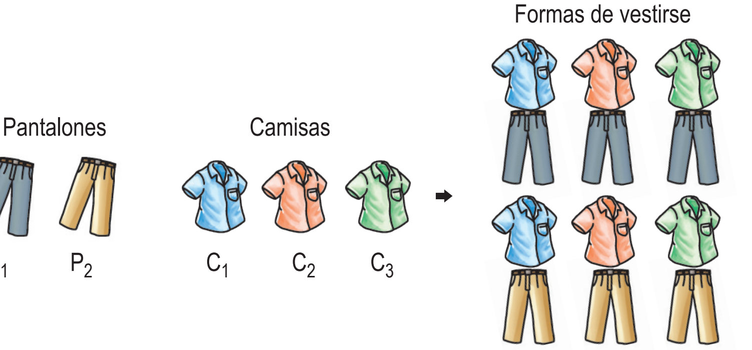
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DEL CONTEO

Principio de multiplicación

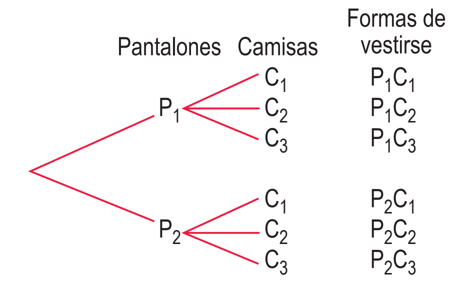
Sea $A = \{a_1; a_2; ...; a_m\}$ un conjunto de m elementos y $B = \{b_1; b_2; ...; b_n\}$ un conjunto de n elementos. El número de pares ordenados $(a_i; b_j)$ que pueden formarse tomando un elemento de A y un elemento de B es igual a $m \times n$.

Ejemplo:
Roberto cuenta con 3 camisas distintas y dos pantalones también diferentes. ¿De cuántas maneras Roberto puede vestirse con dichas prendas?

Resolución:
Se tienen:



Entonces, Roberto puede vestirse de $2 \times 3 = 6$ maneras.
Otra forma de visualizar los pares ordenados es a través del **diagrama secuencial** o **diagrama de árbol**.

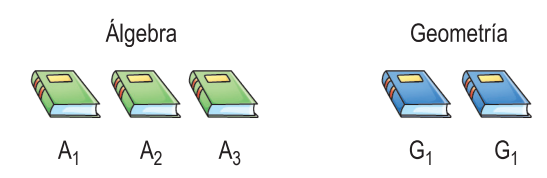


Principio de adición

Si dos decisiones son mutuamente excluyentes y la primera se puede tomar de m maneras y la segunda de n maneras, entonces una o la otra se puede tomar de $m + n$ maneras.

Ejemplo:
Gonzalo debe escoger un libro entre dos cursos: Álgebra y Geometría. Si hay 3 libros de Álgebra y 2 libros de Geometría, ¿de cuántas formas puede escoger un libro?

Resolución:
Se tienen:



Entonces, Gonzalo puede escoger un libro de: $3 + 2 = 5$ maneras diferentes.

Nota

El principio de multiplicación se puede expresar de la siguiente manera: "Una decisión se puede tomar de m maneras y una vez tomada una de ellas, una segunda decisión es tomada de n maneras, entonces el número de maneras de tomar ambas decisiones es igual a $m \times n$".

Observación

Factorial de un número

Se define al factorial de un número entero positivo n, como el producto de los números enteros positivos desde la unidad hasta n. Se denota así: n! o $\underline{\lfloor n}$.

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times ... \times (n-1) \times n$



Recuerda

- $n! = (n-1)! \times n;\ n \geq 2$
- $n! = (n-2)! \times (n-1) \times n;\ n \geq 3$
- $0! = 1$
- $1! = 1$

Atención

Permutaciones
$Pn = n!$

Combinaciones
$C_k^n = \dfrac{n!}{k! \times (n-k)!}$

Variaciones
$V_k^n = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Problemas resueltos

1 Calcula: $2 \times 3! + C_3^{11} + V_2^{20}$

Resolución

$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$

$$C_3^{11} = \frac{11!}{(11-3)! \times 3!} = \frac{11!}{8! \times 3!} = \frac{\cancel{8!} \times 9 \times 10 \times 11}{\cancel{8!} \times 1 \times 2 \times 3} = \frac{990}{6} = 165$$

$$V_2^{20} = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} = \frac{\cancel{18!} \times 19 \times 20}{\cancel{18!}} = 380$$

$\Rightarrow 2 \times 3! + C_3^{11} + V_2^{20} = 2 \times 6 + 165 + 380 = 557$

2 María tiene 8 blusas, 4 faldas y 6 pares de zapatos. Utilizando una de cada tipo de las prendas mencionadas, ¿de cuántas manera diferentes se puede vestir María?

Resolución:

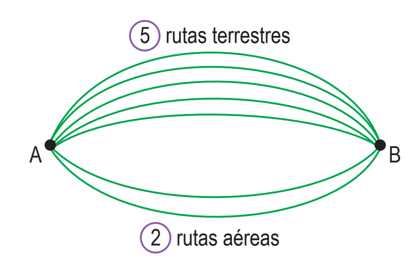
Blusas	Faldas	Pares de zapatos
8	4	6
diferentes	diferentes	diferentes

Entonces:

$\therefore 8 \times 4 \times 6 = 192$ manera diferentes

3 Para llegar de la ciudad A a la ciudad B hay 5 rutas terrestres y 2 rutas aéreas. ¿De cuántas maneras diferentes puede llegar una persona, de A a B, utilizando las rutas mencionadas?

Resolución:



Observamos que una persona no puede ir por la ruta terrestre y aérea al mismo tiempo.

Entonces de A a B una persona puede llegar de 5 + 2 = 7 maneras diferentes.

4 Rosa tiene 3 pares de zapatos diferentes, 2 pantalones diferentes y 4 blusas también diferentes. ¿En cuántos días como mínimo Rosa repite su forma de vestir durante el mes de febrero? (No considere año bisiesto)

Resolución:

Rosa tiene:

3 pares de zapatos diferentes
2 pantalones diferentes
4 blusas diferentes

$\rightarrow 3 \times 2 \times 4 = 24$

Luego, como el mes de febrero tiene 28 días, los 24 primeros días se vestirá de diferente manera y los 28 – 24 = 4 días repetirá su forma de vestir.

5 ¿Cuántos números enteros mayores que 9 y menores que 100 se pueden formar con las cifras 0; 1; 2; 3; 4; 5 y 6?

Resolución:

Sea N dichos números, como es mayor que 9 y menor que 100, entonces N tiene 2 cifras.

a	b
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4
6	5
	6

$6 \times 7 = 42$ números

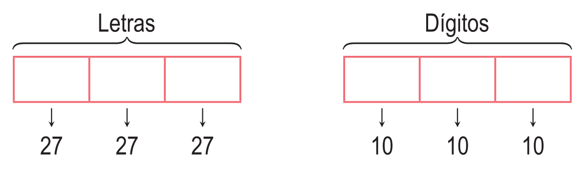
6 La placa de un automóvil consta de tres letras y tres dígitos, en ese orden. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse? Se consideran 27 letras y 10 dígitos.

Resolución:

La primera letra puede alegirse de dos maneras diferentes, lo mismo sucede para las otras dos.

En el caso de las cifras, cada una de estas pueden elegirse de 10 maneras distintas.

Gráficamente:



$\therefore$ Se podrán formar $27 \times 27 \times 27 \times 10 \times 10 \times 10 = 19\,683\,000$ placas distintas.

7 Si tengo un billete de S/.20, uno de S/.50, uno de S/.100 y uno de S/.200, ¿cuántos artículos en total puedo comprar usando algunos o todos mis billetes?

Resolución:

Como tengo cuatro billetes de diferente denominación, entonces debo considerar cuatro casos: cuando uso un billete, dos billetes, tres billetes y cuatro billetes.

- Con un billete puedo comprar cuatro artículos cuyos precios van a ser: S/.20; S/.50 S/.100 y S/.200
- Con dos billetes puedo comprar seis artículos:
  20 + 50 = S/.70 20 + 100 = S/.120
  20 + 200 = S/.220 50 + 100 = S/.150
  50 + 200 = S/.250 100 + 200 = S/.300
- Con tres billetes puedo comprar cuatro artículos:
  20 + 50 + 100 = S/.170 20 + 50 + 200 = S/.270
  50 + 100 + 200 = S/.350 20 + 100 + 200 = S/.320
- Con cuatro billetes puedo comprar un artículo
  20 + 50 + 100 + 200 = S/.370

$\therefore$ En total puedo comprar: 4 + 6 + 4 + 1 = 15 artículos.

PROBABILIDADES

A

EXPERIMENTOS ALEATORIOS

Entendemos por experimento aleatorio aquel cuyo resultado es incierto en el marco de distintas posibilidades y se puede repetir un número de veces arbitrario, manteniendo las mismas condiciones exteriores que caracterizan a dicho experimento.

Ejemplos:
- El lanzamiento de una moneda, cuyos posibles resultados están caracterizados por "cara" y "sello".
- El lanzamiento de un dado después de agitarlo en un cubilete, cuyos posibles resultados están caracterizados por el número que aparece en la cara superior del dado.

ESPACIO MUESTRAL

Un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio, es el conjunto de todos los resultados posibles de dicho experimento. Se denota: Ω

Ejemplos:
- El conjunto de todos los resultados posibles al lanzar una moneda es: $\Omega = \{C; S\}$
- El conjunto de todos los resultados posibles al lanzar un dado es: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Sucesos aleatorios

Es el resultado de un experimento aleatorio.

Ejemplos:
- Al lanzar una moneda se observa un "sello" en la cara superior.
- Al lanzar el dado, el número obtenido es impar.

EVENTO

Un evento es un conjunto de posibles resultados de un experimento, en términos de conjuntos. Es un subconjunto del espacio muestral Ω.

Ejemplo:
Al lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior, se pueden definir los siguientes eventos:
A: el número observado es par. Entonces, $A = \{2; 4; 6\}$
B. el número observado es primo. Entonces, $B = \{2; 3; 5\}$

ESPACIOS MUESTRALES FINITOS EQUIPROBABLES

Sea Ω un espacio muestral finito, esto es: $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; ...; \omega_n\}$. Se dice que un espacio muestral finito es equiprobable si todos los resultados posibles del experimento aleatorio son igualmente probables; es decir, cada uno de los elementos del espacio muestral tienen la misma posibilidad de salir.

Ejemplo:
Al lanzar un dado, hay igual posibilidad que salga cualquiera de los números del espacio muestral:
$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, entonces la probabilidad que salga cualquier número será 1/6.
Entonces, según la definición clásica, la probabilidad que ocurra un experimento se calculará aplicando la siguiente relación.

$$P(A) = \frac{\text{n.° de casos favorables}}{\text{n.° de casos totales}}$$

Donde A es un evento de cierto experimento aleatorio.

Ejemplo:
¿Cuál es la probabilidad de obtener un número impar al lanzar un dado?

Resolución:
Espacio muestral: $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} \Rightarrow n(\Omega) = 6$
Sea el evento:
A: se obtiene un número impar al lanzar un dado.
Entonces: $A = \{1; 3; 5\} \Rightarrow n(A) = 3$
Luego: n.° de casos totales: $n(\Omega) = 6$ y n.° de casos favorables: $n(A) = 3$
Por lo tanto: $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Observación

Un experimento es un proceso mediante el cual se obtiene un resultado de una observación.

Nota

- A los experimentos aleatorios también se les denomina **experimentos no determinísticos**.
- Ω y ϕ (conjunto vacío) son eventos. Al espacio muestral Ω se le llama evento seguro y a ϕ se le llama evento imposible.

Atención

Un experimento determinístico es aquel proceso en el cual el resultado de la observación es determinado en forma precisa.

Ejemplo:
La suma de dos números pares.



Observación

Al conjunto de sucesos aleatorios se les denomina **eventos**, los cuales son subconjuntos del espacio muestral.

Recuerda

Un conjunto finito es aquel donde el proceso de conteo de elementos es limitado.

Ejemplo:
L = {Las letras del abecedario}



Ten en cuenta

Para todo evento A de un espacio muestral Ω, se cumple:

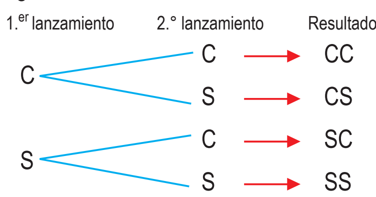
$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Problemas resueltos

1 ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos "sellos" al lanzar dos veces una moneda?

Resolución:

Usando el diagrama de árbol, tenemos:



Donde: C: cara; S: sello

Entonces:

$\Omega = \{CC; CS; SC; SS\}$

Sea el evento:

A: se obtiene dos "sellos" $\Rightarrow$ A = {SS}

Luego:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{1}{4}$

2 ¿Cuál es la probabilidad de obtener una suma igual a 5 al lanzar 2 dados?

Resolución:

El espacio muestral asociado a este experimento, está formado por el conjunto de pares ordenados en las que la primera componente es el resultado del 1.er dado y la segunda componente el resultado del 2.° dado, esto es:

$$\Omega = \left\{\begin{matrix} (1;1); (1;2); (1;3); (1;4); (1;5); (1;6) \\ (2;1); (2;2); (2;3); (2;4); (2;5); (2;6) \\ (3;1); (3;2); (3;3); (3;4); (3;5); (3;6) \\ (4;1); (4;2); (4;3); (4;4); (4;5); (4;6) \\ (5;1); (5;2); (5;3); (5;4); (5;5); (5;6) \\ (6;1); (6;2); (6;3); (6;4); (6;5); (6;6) \end{matrix}\right\} \Rightarrow n(\Omega) = 36$$

Sea el evento:

A: se obtiene una suma igual a 5.

Entonces:

$A = \{(1;4); (2;3); (3;2); (4;1)\} \Rightarrow n(A) = 4$

Luego:

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{4}{36} = \dfrac{1}{9}$

3 La selección de control técnico descubrió 5 libros defectuosos en un lote de 100 libros tomados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar un libro defectuoso?

Resolución:

Como el lote de libros tomados al azar tiene 100 libros, entonces:
$n(\Omega) = 100$
Sea el evento:
A: se selecciona un libro defectuoso.
Del enunciado, 5 libros del lote seleccionado son defectuosos, es decir: $n(A) = 5$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{100} = 0{,}05$

4 Se han efectuado 20 disparos al blanco, registrándose 18 impactos. Halla la probabilidad de impactar en el blanco.

Resolución:

Del enunciado, se han efectuado 20 disparos al blanco, entonces:
$n(\Omega) = 20$
Sea el evento:
A: el disparo impacta en el blanco.
Del enunciado, el número de impactos en el blanco es 18, entonces: $n(A) = 18$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{18}{20} = 0{,}9$

5 En una caja hay 50 piezas idénticas, 5 de las cuales están pintadas. Si extraemos una pieza al azar, halla la probabilidad de que la pieza extraída resulte pintada.

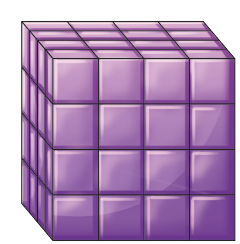
Resolución:

El espacio muestral está formado por las 50 piezas que hay en la caja, es decir: $n(\Omega) = 50$
Sea el evento:
A: la pieza extraída resulta pintada.
Por dato, en la caja hay 5 piezas pintadas, entonces:
$n(A) = 5$

$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{50} = 0{,}1$

6 Un cubo, cuyas caras laterales están pintadas, se ha dividido en 64 cubos más pequeños de igual dimensión. Halla la probabilidad de que un cubo pequeño tomado al azar tenga las caras pintadas.

Resolución:



En la figura se observa que las caras que están pintadas son las exteriores, en total son 56; los cubos que están en el interior no están pintados.

Entonces, el espacio muestral está conformado por 64 cubos pequeños.
Sea el evento:
A: el cubo escogido tiene las caras pintadas.
Del gráfico, hay 56 cubos que tienen las caras pintadas, es decir:
$n(A) = 56$

$\therefore P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{56}{64} = 0{,}875$